Universidad de Oviedo

INGENIERÍA DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

Tema 2c

Cálculo de Antitransformadas

y

Modos Transitorios

Análisis Dinámico de Sistemas

2º Ing. Telecomunicación

Cálculo de Antitransformadas

método directo

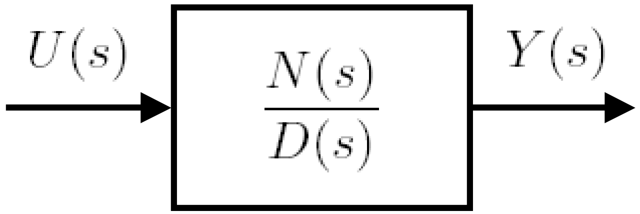
Una posibilidad es el método directo...

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) e^{st} ds$$

El método directo es, a menudo complicado y farragoso

Casi siempre, las funciones F(s) son expresiones racionales (un polinomio dividido por otro) lo que permite aplicar el método de ***descomposición en fracciones simples***

Cálculo de Antitransformadas
descomposición en fracciones simples



$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot U(s) = \text{Expresión Racional} = \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{B_k}{(s - p_k)^r} + \cdots \qquad p_i \in \mathbb{C}$$

tablas *tablas* *tablas*

Cálculo de Antitransformadas
descomposición en fracciones simples

se trata de descomponer la expresión racional F(s)
en funciones más sencillas cuyas transformadas conocemos por tablas

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + \cdots + F_n(s)$$

F(s) puede descomponerse en funciones $F_i(s)$ dos tipos
cuyas transformadas son conocidas:

raíces distintas

$$\frac{A_i}{s - p_i} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} A_i e^{p_i t}$$

raíces múltiples

$$\frac{a_k}{(s - p_i)^k} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{a_k}{(k-1)!} \cdot t^{k-1} e^{p_i t}$$

Cálculo de Antitransformadas
descomposición en fracciones simples

Aplicando la linealidad de la T. de Laplace se obtiene la expresión de *f(t)* como suma de funciones $f_i(t)$ conocidas

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] + \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] + \cdots + \mathcal{L}^{-1}[F_n(s)]$$

$$\underbrace{\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]}_{\text{tablas}} \qquad \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]}_{\text{tablas}} \qquad \underbrace{\mathcal{L}^{-1}[F_n(s)]}_{\text{tablas}}$$

Cálculo de Antitransformadas

descomposición en fracciones simples

Método de Heaviside: raíces distintas

$$F(s) = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots \qquad\qquad p_i \in \mathbb{C}$$

multiplicando por *(s-p$_i$)*

$$(s-p_i)F(s) = A_1\frac{s-p_i}{s-p_1} + A_2\frac{s-p_i}{s-p_2} + \cdots + A_i\cancelto{1}{\frac{s-p_i}{s-p_i}} + \cdots A_n\frac{s-p_i}{s-p_n}$$

evaluando en *s=p$_i$*

$$(s-p_i)F(s)|_{s=p_i} = A_1\frac{0}{s-p_1} + A_2\frac{0}{s-p_2} + \cdots + A_i + \cdots A_n\frac{0}{s-p_n}$$

de donde...

$$\boxed{A_i = (s-p_i)F(s)|_{s=p_i}}$$

Cálculo de Antitransformadas

descomposición en fracciones simples

Método de Heaviside: raíces distintas

Las fracciones resultantes tienen antitransformada conocida:

$$\frac{A_i}{s - p_i} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} A_i e^{p_i t}$$

pudiendo obtenerse ya *f(t)* por linealidad de la T. de Laplace

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots$$

Cálculo de Antitransformadas

descomposición en fracciones simples

Método de Heaviside: raíces distintas (complejas)

aunque dos de las raíces sean complejas,
no se trata de ningún caso especial.

En efecto, supongamos dos raíces complejas
(siempre vienen en pares conjugados):

$$p_i = \sigma + j\omega, \quad p_i^* = \sigma - j\omega$$

Al aplicar Heaviside, nos van a quedar
dos coeficientes también conjugados (comprobarlo en casa):

$$p_i, p_i^* \longrightarrow C_i, C_i^*$$

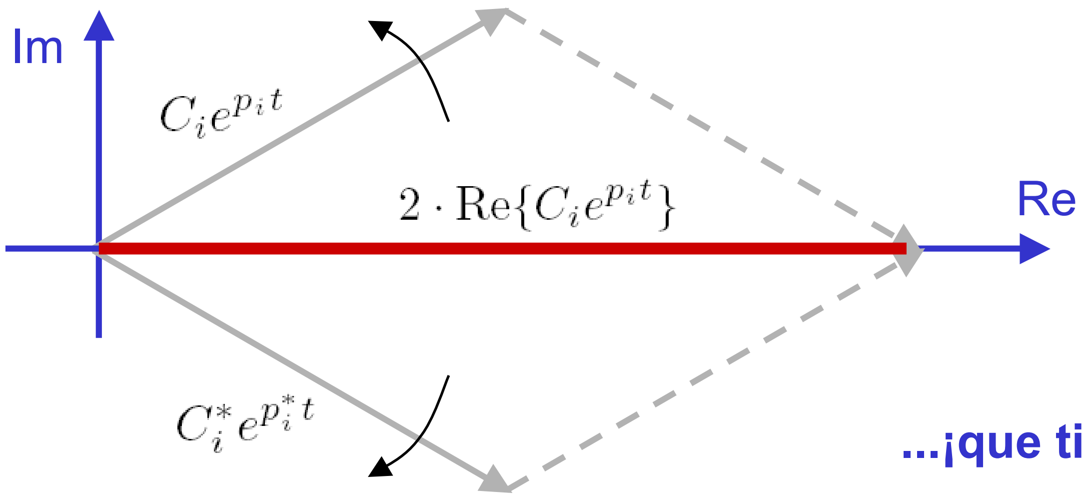
Cálculo de Antitransformadas

descomposición en fracciones simples

Método de Heaviside: raíces distintas (complejas)

Agrupando las dos funciones básicas resultantes por parejas queda siempre una función real...

$$C_i e^{p_i t} + C_i^* e^{p_i^* t} = 2 \cdot \mathrm{Re}\{C_i e^{p_i t}\} = 2|C_i| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \arg\{C_i\})$$



Nota:

$$C_i = |C_i| e^{j \arg\{C_i\}}$$

$$e^{p_i t} = e^{(\sigma + j\omega)t} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$$

...¡que tiene carácter oscilatorio!

Cálculo de Antitransformadas

descomposición en fracciones simples

Método de Heaviside: raíces múltiples

$$
\begin{aligned}
F(s) \quad = \quad & \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \cdots + \frac{A_{i-1}}{s-p_{i-1}} \\
& + \frac{a_1}{(s-p_i)} + \frac{a_2}{(s-p_i)^2} + \cdots \frac{a_r}{(s-p_i)^r} \\
& + \frac{A_{i+1}}{s-p_{i+1}} + \cdots + \frac{A_n}{s-p_n}
\end{aligned}
$$

Cálculo de Antitransformadas

descomposición en fracciones simples

Método de Heaviside: raíces múltiples

Supongamos:

$$F(s) = \cdots \frac{a_1}{s-p_i} + \frac{a_2}{(s-p_i)^2} + \frac{a_3}{(s-p_i)^3} + \frac{A_{i+1}}{s-p_{i+1}} + \cdots$$

entonces...

$$(s-p_i)^3 F(s)\big|_{s=p_i} = \cdots \cancelto{0}{a_1(s-p_i)^2} + \cancelto{0}{a_2(s-p_i)} + a_3 + \cancelto{0}{A_{i+1}\frac{(s-p_i)^3}{s-p_{i+1}}} + \cdots$$

$$\frac{d}{ds}\left[(s-p_i)^3 F(s)\right]\Big|_{s=p_i} = \cdots \cancelto{0}{2a_1(s-p_i)} + a_2 + 0 + \frac{d}{ds}\left[\cancelto{0}{A_{i+1}\frac{(s-p_i)^3}{s-p_{i+1}}}\right] + \cdots$$

$$\frac{d^2}{ds^2}\left[(s-p_i)^3 F(s)\right]\Big|_{s=p_i} = \cdots 2a_1 + 0 + 0 + \frac{d^2}{ds^2}\left[\cancelto{0}{A_{i+1}\frac{(s-p_i)^3}{s-p_{i+1}}}\right] + \cdots$$

Cálculo de Antitransformadas

descomposición en fracciones simples

Método de Heaviside: raíces múltiples

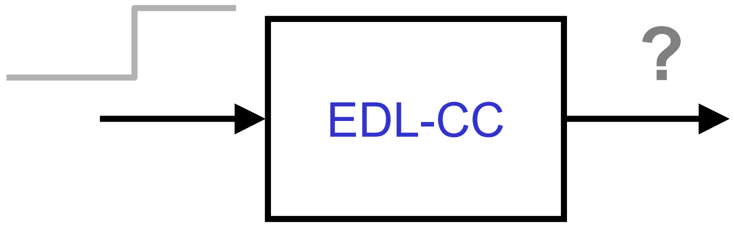
$$
\begin{aligned}
a_r &= \{F(s)(s-p_i)^r\}_{s=p_i} \\
a_{r-1} &= \left\{\frac{d}{ds}\left[F(s)(s-p_i)^r\right]\right\}_{s=p_i} \\
a_{r-2} &= \frac{1}{2!}\left\{\frac{d^2}{ds^2}\left[F(s)(s-p_i)^r\right]\right\}_{s=p_i} \\
a_{r-3} &= \frac{1}{3!}\left\{\frac{d^3}{ds^3}\left[F(s)(s-p_i)^r\right]\right\}_{s=p_i} \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
a_1 &= \frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left[F(s)(s-p_i)^r\right]\right\}_{s=p_i}
\end{aligned}
$$

Ejemplo 1

dado el sistema lineal definido por

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{d^2u(t)}{dt^2} + 6\frac{du(t)}{dt} + 8u(t)$$

determinar la respuesta ante un escalón unitario



Ejemplo 1

La transformada de Laplace de un escalón unitario es

$$1(t) \longrightarrow \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)(s+3)}$$

descomponiendo en fracciones simples

$$Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_2}{s+1} + \frac{C_3}{s+3}$$

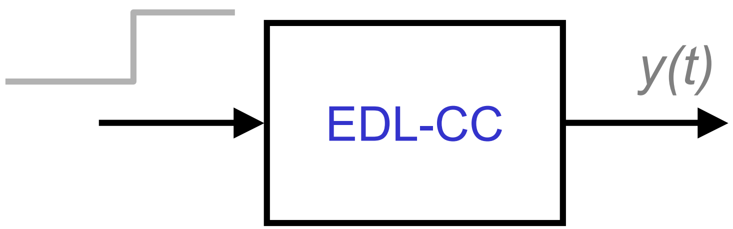
Ejemplo 1

Aplicando Heaviside para las raíces *s={0,-1,-3}*

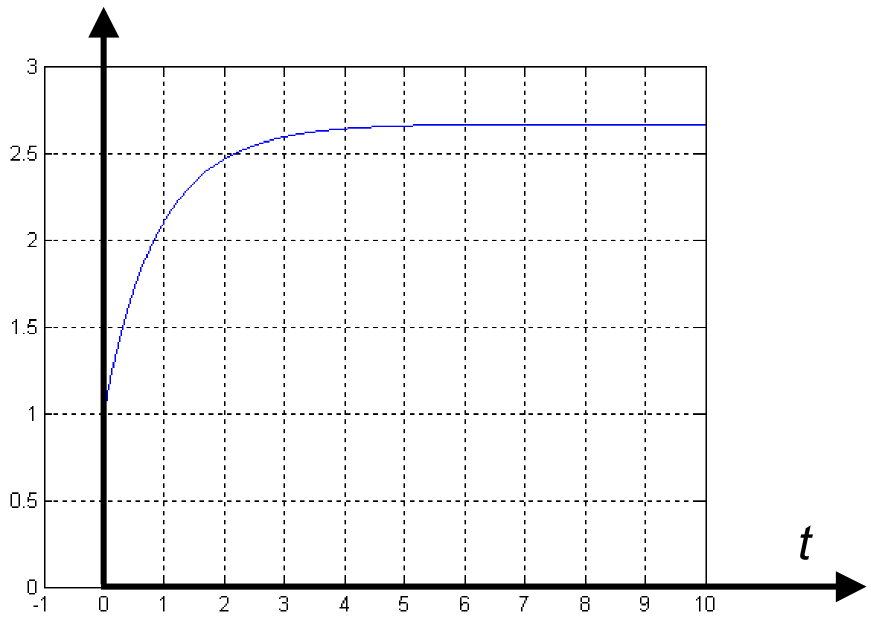
$$
\begin{aligned}
C_1 &= s \cdot G(s)|_{s=0} = \left.\frac{(s+2)(s+4)}{(s+1)(s+3)}\right|_{s=0} = 8/3 \\
C_2 &= (s+1) \cdot G(s)|_{s=-1} = \left.\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+3)}\right|_{s=-1} = -3/2 \\
C_3 &= (s+3) \cdot G(s)|_{s=-3} = \left.\frac{(s+2)(s+4)}{s(s+1)}\right|_{s=-3} = -1/6
\end{aligned}
$$

$$
y(t) = \frac{8}{3} \cdot 1(t) - \frac{3}{2} \cdot e^{-t} - \frac{1}{6} \cdot e^{-3t}
$$

Ejemplo 1
simulación



$$y(t) = \frac{8}{3} \cdot 1(t) - \frac{3}{2} \cdot e^{-t} - \frac{1}{6} \cdot e^{-3t}$$

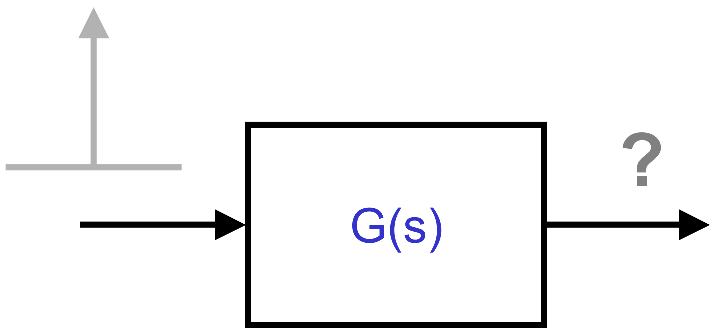


Ejemplo 2

dado el sistema lineal definido por su función de transferencia

$$G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$$

determinar la respuesta ante un impulso



Ejemplo 2

La transformada de Laplace de un impulso $\delta(t)$ es

$$\delta(t) \longrightarrow 1$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = G(s) = G(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s+2)^2}$$

descomponiendo en fracciones simples

$$Y(s) = \frac{C_1}{s} + \frac{C_{21}}{s+2} + \frac{C_{22}}{(s+2)^2}$$

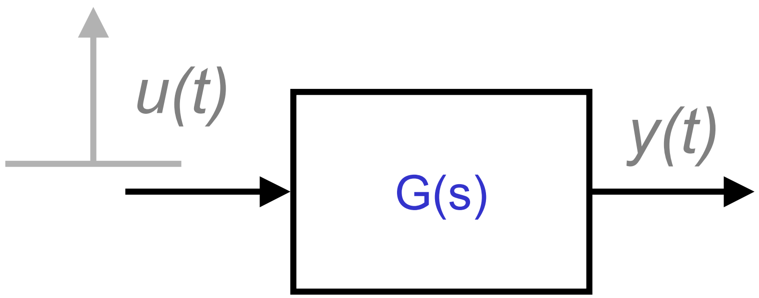
Ejemplo 2

Aplicando Heaviside para las raíces *s={-1,-2(doble)}*

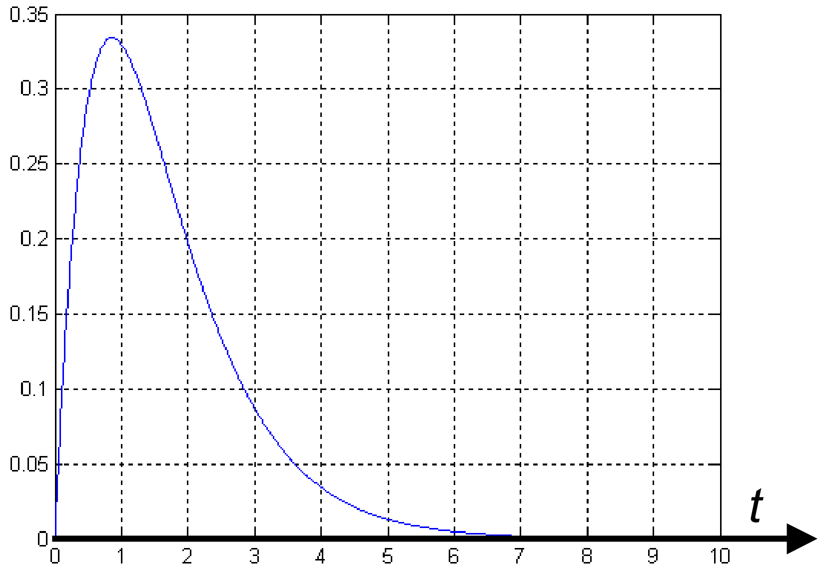
$$\begin{aligned}
C_1 &= (s+1)\cdot G(s)|_{s=-1} = \left.\frac{(s+3)}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 2 \\
C_{21} &= \left.\frac{d}{ds}(s+2)^2\cdot G(s)\right|_{s=-2} = -2 \\
C_{22} &= (s+2)^2\cdot G(s)|_{s=-2} = \left.\frac{(s+3)}{(s+1)}\right|_{s=-2} = -1
\end{aligned}$$

$$y(t) = 2\cdot e^{-t} - 2\cdot e^{-2t} - t\cdot e^{-2t} = 2\cdot e^{-t} - (2+t)\cdot e^{-2t}$$

Ejemplo 2
simulación



$$y(t) = 2 \cdot e^{-t} - (2+t) \cdot e^{-2t}$$



Ejemplo 3

Dado el siguiente sistema lineal

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 7\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} = 3\frac{du(t)}{dt} + 6u(t)$$

Suponiendo que en t=0 el sistema está en equilibrio
y que tanto u(0) como y(0) valen cero

a) obtener su función de transferencia
b) obtener su respuesta temporal ante una señal de tipo impulso

Ejemplo 3

a) función de transferencia

para calcular la T. de Laplace de las derivadas d^ky/dt^k, d^ku/dt^k que aparecen en la EDL-CC utilizamos

(cond. iniciales nulas)

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) \quad = \quad s^n F(s) - \cancelto{0}{\sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0) s^{n-k}}$$

entonces...

$$s^3Y(s) + 7s^2Y(s) + 12sY(s) = 3sU(s) + 6U(s)$$

$$(s^3 + 7s^2 + 12s)Y(s) = 3(s+2)U(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3(s+2)}{s(s^2+7s+12)} = \frac{3(s+2)}{s(s+3)(s+4)}$$

Ejemplo 3
b) Respuesta impulsional

$$y(t) = g(t) * \delta(t)$$

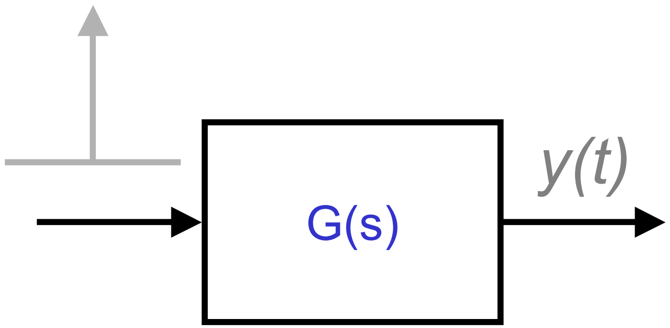
$$y(s) = G(s) \cdot 1(s) = \frac{3(s+2)}{s(s+3)(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+3} + \frac{C}{s+4}$$

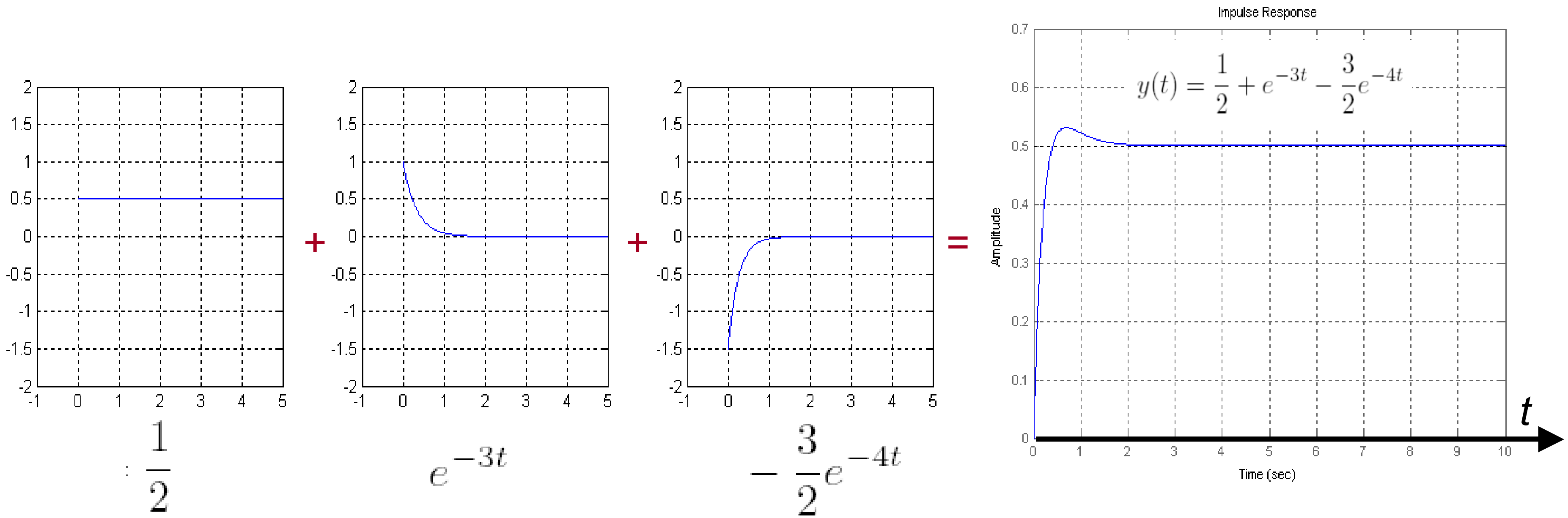
$$\begin{aligned} A &= sG(s)|_{s=0} = \frac{1}{2} \\ B &= (s+3)G(s)|_{s=-3} = 1 \\ C &= (s+4)G(s)|_{s=-4} = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

de donde, aplicando la T. inversa de Laplace

$$y(t) = \frac{1}{2} + e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}$$

Ejemplo 3
Simulación





Modos Transitorios

- Resultados importantes:

  1) La respuesta $f(t)$ de un sistema es suma de funciones elementales (*modos transitorios*) asociadas a los polos de $F(s)$.

  2) La posición de los polos en el plano complejo marca la dinámica de los modos transitorios

- El plano complejo o plano S constituye un verdadero "mapa" de la dinámica del sistema

Modos Transitorios

Si expresamos la raíz p_i como:

$$p_i = \sigma + j\omega$$

En general:

- Si p_i es real da lugar a una exponencial
  - *si $\sigma > 0$ será creciente y no acotada (inestable)*
  - *si $\sigma < 0$ será decreciente y tenderá a cero*
  - *Cuanto mayor sea $|\sigma|$, más rápido crece o decrece*

- Si p_i tiene parte imaginaria dará lugar a modos oscilatorios
  - *crecientes y no acotados si $\sigma > 0$*
  - *decrecientes (tienden a cero) si $\sigma < 0$*
  - *cuanto mayor sea ω más frecuencia de oscilación*
  - *cuanto mayor sea $|\sigma|$ más rápido tiende a cero (o a infinito si $\sigma > 0$)*
  - *La proporción entre σ y ω nos indica el "grado de oscilación"*
  - *Para sistemas estables:*
    - *→ Si $\sigma >> \omega$ se hace cero antes de que le de tiempo a completar un ciclo (poco oscilatorio)*
    - *→ Si $\omega >> \sigma$ oscila muchas veces antes de tender a cero (muy oscilatorio)*

Mapa de la Dinámica en el plano S