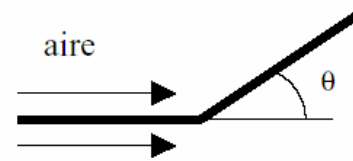


1. Quizá hasta un 80% de las prestaciones de un Fórmula 1 puedan depender de la aerodinámica. Uno de los elementos más llamativos de la carrocería es el alerón trasero, que desempeña la función inversa a la del ala de un avión, proporcionando una fuerza que empuja el coche hacia abajo, mejorando la adherencia al asfalto, y proporcionando mayor estabilidad.



Su efecto se basa en que el aire circula a mayor velocidad por la cara inferior del alerón que por la superior, provocando (Bernouilli) una diferencia de presión en sentido descendente.



Para una superficie constante del alerón, a mayor ángulo de ataque (θ) se consigue una mayor fuerza en sentido descendente. El inconveniente es que también aumenta el arrastre o resistencia aerodinámica, opuesta al sentido de avance del automóvil, proporcional al cuadrado de la velocidad, y por tanto importante a altas velocidades.

Plantee un esquema de control que permita mantener una fuerza aerodinámica descendente constante mediante un alerón con ángulo de ataque ajustable (prohibido por la normativa de F1).

2. Para el alerón de la cuestión anterior, suponiendo que la fuerza descendente (F) es proporcional al ángulo de ataque y al cuadrado de la velocidad del monoplaza (v), linealice el sistema alrededor del punto de trabajo (F_0, v_0, θ_0) y dibuje el diagrama de bloques modificado incluyendo el efecto de la velocidad.

3. Dado el siguiente sistema

$$G(s) = \frac{2}{s + 2}$$

se implementa un control con realimentación unitaria empleando los siguientes controladores

$$C_1(s) = 5, \quad C_2(s) = 2 \cdot \frac{s + 2}{s}$$

Calcular para ambos el error de seguimiento de referencias de tipo escalón y el efecto de perturbaciones de carga del tipo $d_i(t) = K \cdot \cos(2t)$.

En la figura 1 se representan los diagramas de Bode de amplitud y fase de las cuatro funciones de sensibilidad de dos sistemas automáticos diferentes, $T_1(s)$ y $T_2(s)$.

1. ¿Cuál de ellos presenta un mejor rechazo de perturbaciones?
2. ¿Cuál de ellos ofrece mejor seguimiento de consigna?
3. ¿Qué diferencia presenta el controlador o regulador de cada uno de ellos?

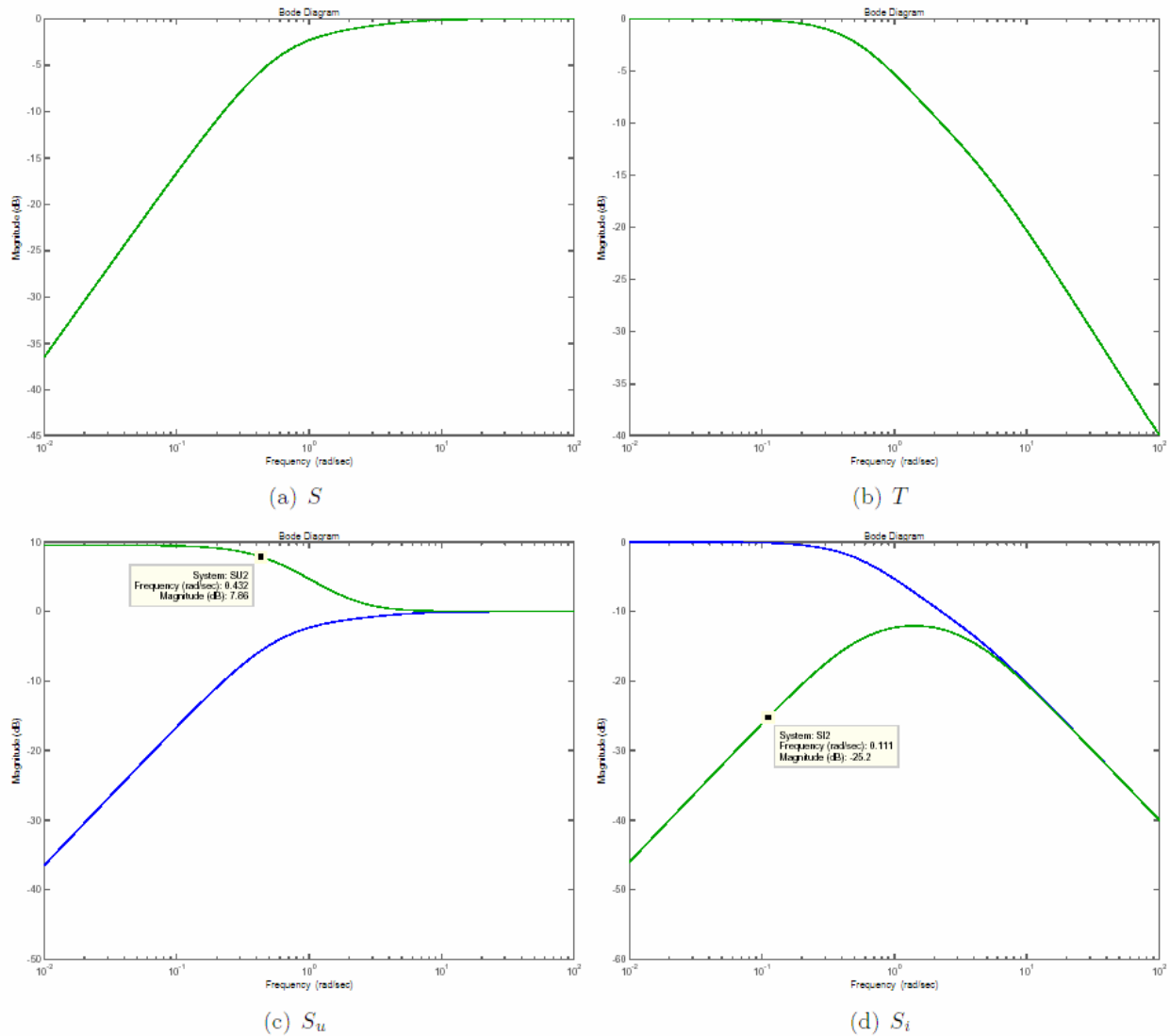
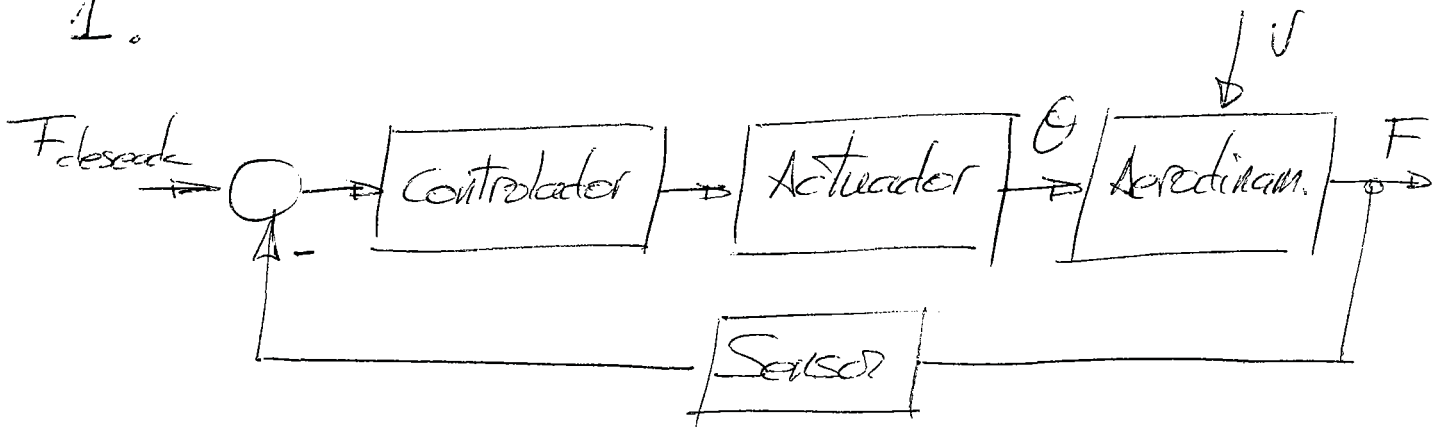


Figura 1: Funciones de sensibilidad de dos sistemas automáticos $T_1(s)$ y $T_2(s)$. Las líneas con etiqueta se corresponden con el sistema 2.

Cuestiones 1 y 2

1.



2.

$$F = K \Theta v^2 \rightarrow F - K \Theta v^2 = 0$$

$$f(F, \Theta, v) = 0$$

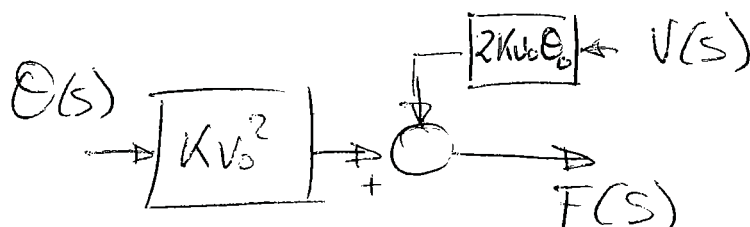
$$\left. \frac{\partial f}{\partial F} \right|_0 = 1 \quad ; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial \Theta} \right|_0 = -K v_0^2 \quad ; \quad \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_0 = -2K v_0 \Theta_0$$

La ecuación linealizada queda:

$$\Delta F - K v_0^2 \Delta \Theta - 2K v_0 \Theta_0 \Delta v = 0$$

En transformadas de Laplace:

$$F(s) = K v_0^2 \Theta(s) + 2K v_0 \Theta_0 V(s)$$



Cuestión 3

Primer controlador: $G(s) = 5$

$$L(s) = 5 \cdot \frac{2}{s+2} = \frac{10}{s+2}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1 + \frac{10}{s+2}} = \frac{s+2}{s+12}$$

$$Si(s) = \frac{G(s)}{1+L(s)} = G(s) \cdot S(s) = \frac{2}{s+12}$$

El error de seguimiento de referencias viene dado por $S(s)$ en este caso. En régimen permanente, para referencias tipo escalón unitario:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot S(s) = S(0) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \Rightarrow \underline{\underline{16.6\%}}$$

El efecto de una perturbación de carga de tipo coseno $d_i = k \cdot \cos(2t)$ puede obtenerse sustituyendo $Si(s)|_{s=j\omega}$

$$Si(j\omega) = \frac{2}{2j+12} = \frac{1}{j+6}$$

La salida ante esa perturbación tendrá como módulo

$$\begin{aligned} \cancel{K} \cdot |S_i(j\omega)| &= K \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2+6^2}} = K \cdot \frac{1}{\sqrt{37}} \\ \frac{1}{\sqrt{37}} &= 0.164 \rightarrow \text{La pert. tiene un efecto del } \underline{\underline{16.4\%}} \end{aligned}$$

Cuestión 3

Segundo controlador $C_2(s) = 2 \cdot \frac{s+2}{s}$

$$L(s) = C_2(s) \cdot G(s) = 2 \cdot \frac{s+2}{s} \cdot \frac{2}{s+2} = \frac{4}{s}$$

$$S(s) = \frac{1}{1+L(s)} = \frac{1}{1+\frac{4}{s}} = \frac{s}{s+4}$$

$$S_i(s) = G(s) \cdot S(s) = \frac{2}{s+2} \cdot \frac{s}{s+4} = \frac{2s}{(s+2)(s+4)}$$

Error en régimen permanente ante referencias de tipo escalón:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot S(s) = S(0) = \underline{\underline{0}}$$

El sistema tiene un seguimiento de referencias sin error en régimen permanente
(tipo escalón)

El efecto de perturbaciones de carga senoidal puede calcularse como antes

$$S_i(2j) = \frac{2 \cdot 2j}{(2j)^2 + 6 \cdot 12j + 8} = \frac{4j}{-4 + 12j + 8} = \frac{4j}{12j + 4} = \frac{j}{3j + 1}$$

En la salida habrá una senoide de amplitud

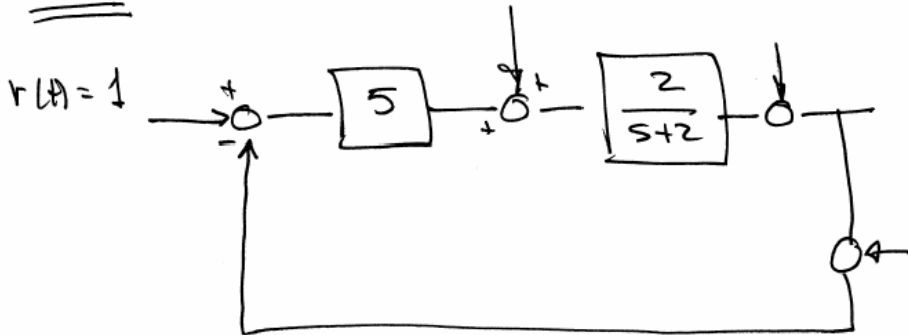
$$k \cdot |S_i(2j)| = k \cdot \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1}} = k \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = k \cdot 0.316$$

El efecto de la perturbación es de un 31.6%
Resaca a nivel perturb. tipo escalón en reg. perm. ¡No a nivel perturb. senoidal!

Cuestión 3

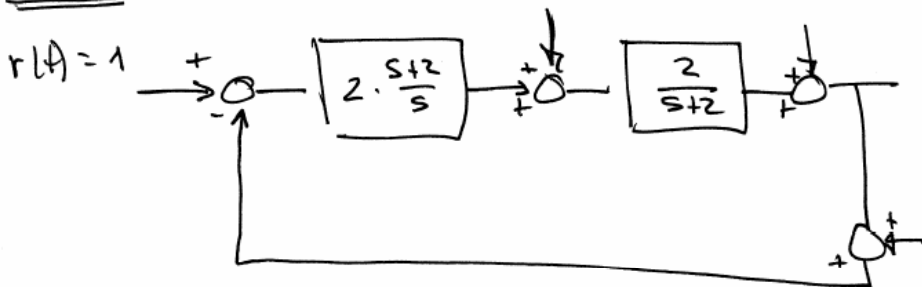
Caso 1

$$d_i(t) = K \cdot \cos(2t)$$



Caso 2

$$d_i(t) = K \cdot \cos(2t)$$



Conclusiones

- * El controlador $C_1(s)$ no anula perturbaciones constantes (escalón) en reg. permanente, pero consigue mejor atenuación para perturbaciones de carga senoidales de freq. $\omega = 2 \text{ rad/s}$
- * El controlador $C_2(s)$, de tipo PI anula perturbaciones de carga ^{constantes} en régimen permanente y tiene un buen seguimiento de referencias constantes (escalón) en reg. perm. Sin embargo se comporta peor en cuanto a pert. de carga senoidales de freq. $\omega = 2 \text{ rad/s}$ cuyo efecto es un 31.6% (frente al 16.4% del controlador C_1)

Cuestión 4

1. La función de sensibilidad S muestra el comportamiento del sistema de control ante perturbaciones en la salida. Puesto que ambos sistemas presentan la misma S , ambos se comportarán igual ante este tipo de perturbaciones. Sin embargo, para analizar en detalle el comportamiento ante perturbaciones de carga, hay que fijarse en la sensibilidad de entrada, S_i . En este caso se observa un comportamiento superior del sistema 2 (función más baja = mejor rechazo de perturbaciones). A altas frecuencias es la dinámica del sistema a controlar quien domina el rechazo de perturbaciones, por tanto ambas funciones se igualan.
2. El seguimiento de consigna se puede analizar tanto por la función de sensibilidad, S , que da la medida del error de seguimiento, o mediante la sensibilidad complementaria o función de transferencia del sistema en cadena cerrada, T . Para ambos sistemas estas funciones son iguales, por tanto el comportamiento será idéntico en cuanto a seguimiento de consignas.
3. La función de transferencia en cadena cerrada de ambos sistemas es la misma, y el error de seguimiento de consigna es nulo en régimen permanente en ambos casos. Esto indica la presencia de un integrador en el sistema ($1/s$). En el caso del sistema 1, este integrador es parte del sistema a controlar, y por eso no rechaza perturbaciones de entrada a bajas frecuencias. En el caso del sistema 2 el integrador está en el controlador (regulador PI) y por tanto, además de proporcionar error de seguimiento nulo en régimen permanente, anula las perturbaciones de bajas frecuencias. Esto supone un mayor esfuerzo de este controlador a bajas frecuencias, lo cual se puede observar en la función de sensibilidad de control, S_u .