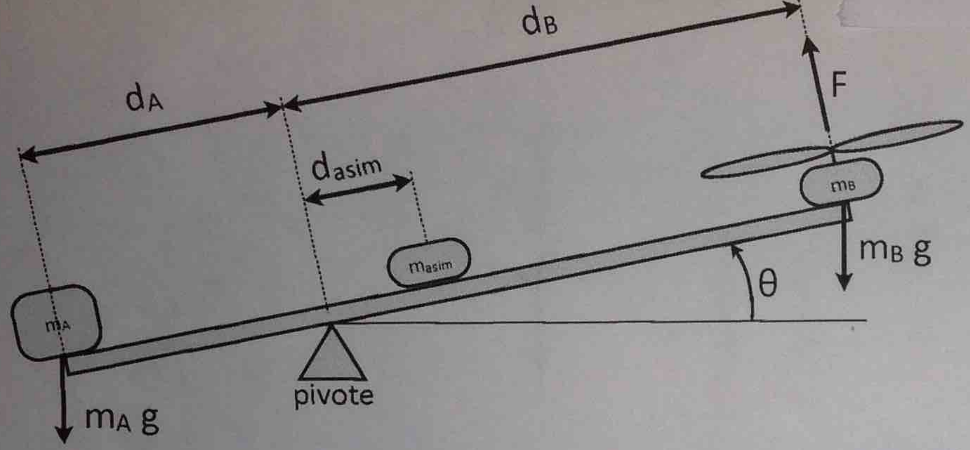
Examen final de Sistemas Automáticos — Convocatoria de Mayo — 15/05/2013

Universidad de Oviedo




**Problema.** Se desea controlar el ángulo θ del aeropéndulo de la figura, consistente en una barra que gira respecto a un pivote, una masa $m_A$ en un extremo y un propulsor de masa $m_B$ en el otro, consistente en una hélice y un motor. El propulsor produce una fuerza de 1N por cada voltio aplicado al motor. La masa de la barra se considera despreciable y el momento de inercia del conjunto respecto al pivote es J. El balance de momentos viene dado por la siguiente ecuación:

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = m_A g d_A \cos(\theta) - m_B g d_B \cos(\theta) + d_B F$$

**Datos**

$m_A = 0.2$ kg
$m_B = 0.05$ kg
$d_A = 0.2$ m
$d_B = 0.4$ m
$g = 10$ m/s$^2$
$J = 0.016$ kg m$^2$
$m_{asim} = 0.001$ kg
$d_{asim} = 0.1$ m
$G_{prop} = 1$ N / V

Para diseñar el sistema de control se mide el ángulo θ mediante un encoder, se compara con un ángulo de referencia θ* y en función del error se genera una tensión $u$ aplicada al propulsor, el cual produce una fuerza $F$ que permite corregir las desviaciones de θ respecto a θ*.

Se pide:

- Obtener un modelo lineal de la ecuación válido en torno al punto de equilibrio definido por θ=0. Determinar el valor $F_0$ de la fuerza en el equilibrio y la función de transferencia $G(s)$ entre la fuerza $F$ y el ángulo θ.
- Obtener el diagrama de bloques del sistema de control, indicando claramente todos los elementos.
- Diseñar el regulador más sencillo del tipo $C(s) = k_p + k_i/s + k_d s$ que permita controlar la planta con un tiempo de establecimiento de 3 seg. y una sobreoscilación del 4.3%. Si fuese necesario, diseñar un prefiltro $F(s)$, explicando el porqué de su uso.
- Calcular el error de posición $e_p$ en p.u.
- Calcular el error en grados si se ubica una masa asimétrica de 1g a una distancia de 0.1 m del pivote en el lado B.

<u>**IMPORTANTE**</u>:

- Entregar todo en **UNA SOLA HOJA**.
- Se valorará la **claridad y concisión** en los desarrollos y explicaciones.
- Justificar adecuadamente los resultados. Aunque sean correctos podrán no tener validez si no se han justificado o si la justificación no es correcta.
- Las **faltas de ortografía** y los **errores en las operaciones** podrán penalizar el ejercicio.

## Ecuación del sistema

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = m_A \cdot g \cdot d_A \cdot \cos\theta - m_B \cdot g \cdot d_B \cdot \cos\theta + d_B \cdot F$$

**Equilibrio** $\left(\theta_0 = 0 \ , \ \frac{d}{dt} = 0\right)$

$$0 = (m_A g d_A - m_B g d_B)\cancel{\cos\theta_0}^{\,1} + d_B F_0$$

$$\rightarrow \boxed{F_0 = -\frac{m_A g d_A - m_B g d_B}{d_B} = -0.5\,Nm}$$

(debe ejercer una fuerza hacia abajo para mantener el equilibrio)

**Taylor**

para la única expresión no lineal:

$$\Delta \cdot \left[\underbrace{(m_A g_A d_A - m_B g d_B)}_{K_{TE}}\cos\theta\right] \simeq \frac{\partial}{\partial\theta}\left[K_{TE}\cos\theta\right]\Bigg|_{\theta=\theta_0} \cdot \Delta\theta =$$

$$= -K_{TE}\,\text{sen}\,\theta_0 \cdot \Delta\theta = \underline{\underline{0}}$$

el resto de los términos son lineales

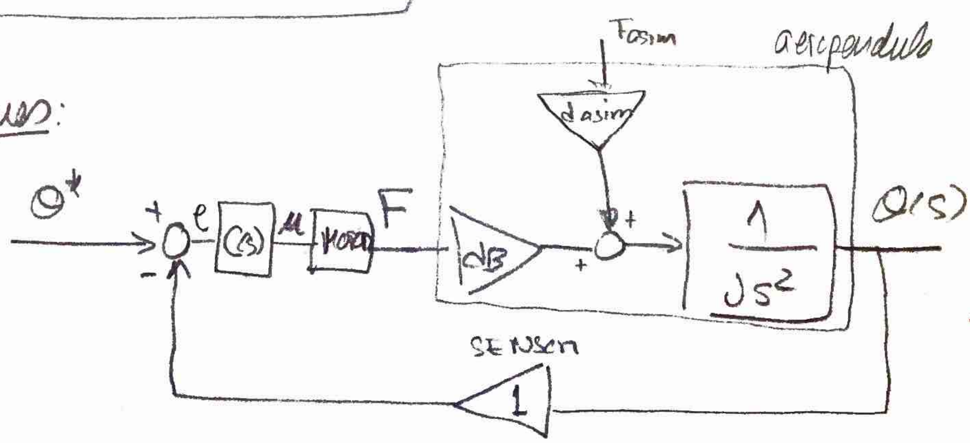
Ec. diferencial linealizada

$$J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = \cancel{0 \cdot \Delta\theta} + d_B \, \Delta F \ \rightarrow \ \boxed{J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = d_B \cdot \Delta F}$$

Laplace:

$$\boxed{\theta(s) = \frac{d_B}{Js^2} \cdot F(s)}$$

**Diagrama de bloques:**



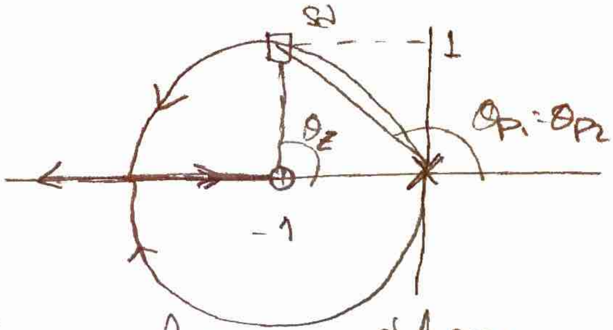
## Diseño del controlador

$t_s = 3\,seg = \frac{3}{\sigma} \rightarrow \boxed{\sigma = 1}$ $\rightarrow S_d = -1 \pm j$

$M_p = 4.3\% = 0,043\,(p.u) = e^{-\pi \cot g\,\theta} \rightarrow \boxed{\theta = 45^\circ}$

## Ec. característica

$$1 + \underbrace{K d_B \times}_{K_{LR}} \frac{1}{J s^2} = 0$$




Criterio del argumento para determinar la posición del cero:

$$\theta_{p_1} + \theta_{p_2} - \theta_z = 180^\circ \cdot (2q+1)$$

$$135^\circ + 135^\circ - \theta_z = 180^\circ \rightarrow \theta_z = 270^\circ - 180^\circ = 90^\circ$$

por tanto, el cero está situado justo debajo de sd (en la vertical)

Criterio del módulo

$$K_{LR} = \frac{\prod d_{pi}}{\prod d_{zi}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1} = 2$$

$$K_{LR} = 2 = K \times d_B \cdot \frac{1}{J} \rightarrow K = \frac{2 \times J}{d_B} = \frac{2 \times 0,016}{0.4} = 0,08$$

$\boxed{C(S) = 0,08 \cdot (S+1)} \rightarrow K_p = 0,08$

$K_d = 0,08$

Error de posición

$\boxed{e_p = \frac{1}{1+L(0)} = 0} \rightarrow$ sistema tipo II $L(0) = \infty$

Error con masa asimétrica

$F_{asim} = \underbrace{0.001}_{peso} \times \underbrace{10}_{g}$

$$S_i(s) = \frac{d_{asim} \frac{1}{Js^2}}{1 + K \cdot (S+C) \cdot d_B \frac{1}{Js^2}} = \frac{d_{asim}}{Js^2 + 0.08(s+1)\,d_B}$$

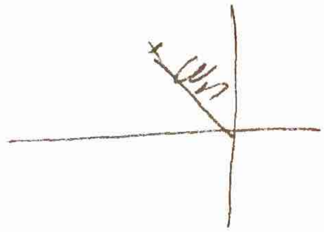
$\boxed{\Delta\theta = S_i(0) \times F_{asim}} = \frac{d_{asim}}{0,08 \times 1 \times d_B} \times F_{asim} = 0.0312$ rads $\xrightarrow{\times \frac{180}{\pi}} \boxed{= 1.8^\circ}$

## Elección del periodo de muestreo

No hay frecuencias de aliasing (según enunciado)

$\rightarrow$ $w_m \simeq 20\text{-}40\, w_{cg}$ $\rightarrow$ elegimos $w_m = 40 w_{cg}$

$w_{cg} \simeq$ ancho de banda $\simeq w_n$




$w_{cg} = 1.414$ $\longrightarrow$ $T_m = 0.11$ seg

aplicando Tustin $\left(s = \frac{2}{T_m} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$

$$C(z) = \frac{1.52 - 1.36 z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Ec. en diferencias del controlador

$$\boxed{F_k = F_{k-1} + 1.52 e_k - 1.36 e_{k-1}}$$

siendo $e_k = \theta_k^* - \theta_k$