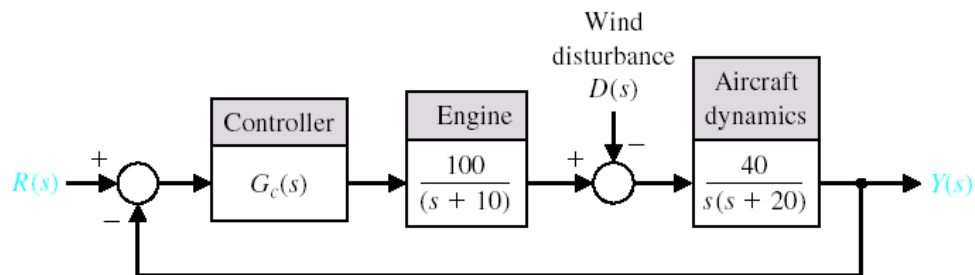
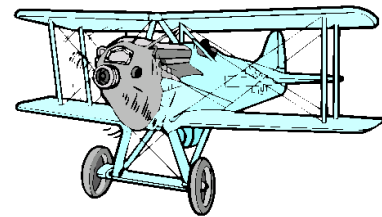
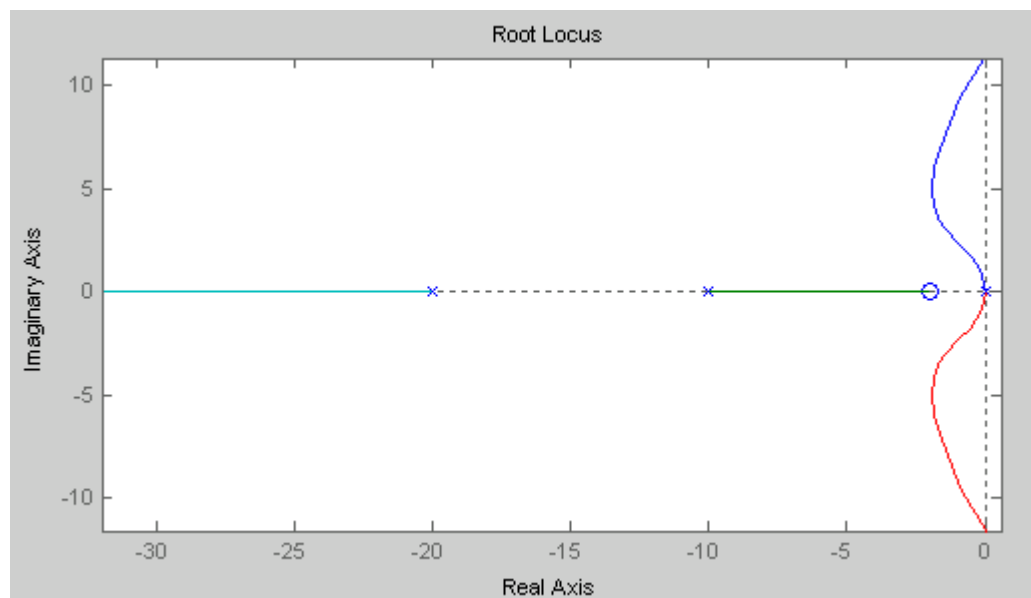


**Problema 1. (4,5 puntos)**

El control de rumbo de un biplano tradicional, se representa en el siguiente diagrama. En el bloque *Engine* se modela el efecto del motor y del timón de dirección. El viento se puede considerar una perturbación que desviará el avión. Dicho de otra forma, en presencia de viento lateral, la nariz del avión no deberá apuntar al objetivo si es que se desea llegar a él. (Adaptado del problema DP10.2 de Dorf, "Modern Control Systems", pp. 624-625, Prentice Hall, 2001 )



1. Determine el valor mínimo de la ganancia estática del controlador, de modo que el efecto en régimen permanente de una perturbación de tipo escalón sea menor o igual a un 5%.
2. Compruebe si el sistema con un regulador proporcional que cumpla el apartado anterior es estable (emplee el método que desee).
3. Diseñe en frecuencia un compensador que sin disminuir el ancho de banda consiga un margen de fase de  $30^\circ$  (realice una iteración, compruebe el resultado e indique en qué sentido deberían realizarse las iteraciones siguientes). Debe cumplir también la especificación del apartado 1.
4. Suponiendo que el controlador se va a implementar sobre un dispositivo digital, elija razonadamente un período de muestreo adecuado.
5. Se ha diseñado mediante el lugar de las raíces otro regulador, y se ha obtenido la siguiente representación. Sólo falta calcular su ganancia estática  $k$ :



- a. ¿Para qué valores de  $k$  se cumplirá la especificación del apartado 1?
- b. Indique la función de transferencia del regulador ¿de qué tipo de regulador es?
- c. Elija razonadamente las mejores especificaciones posibles y calcule, a partir de la gráfica, el valor de  $k$  que hará cumplir esas especificaciones.
- d. Para esa  $k$  obtenga la función de transferencia del sistema realimentado y comente el efecto de todos sus elementos.

## Soluciones. Problema 1

1. En primer lugar se obtiene la función de transferencia entre  $Y(s)$  y  $D(s)$ :

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{-40(s+10)}{s(s+10)(s+20) + 4000G_c(s)}$$

El efecto en régimen permanente de la perturbación de tipo escalón se puede calcular aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{-40(s+10)}{s(s+10)(s+20) + 4000G_c(s)} = \frac{-400}{4000G_c(0)} = \frac{-1}{10G_c(0)}$$

$$\left| \frac{-1}{10G_c(0)} \right| \leq 0.05 \Rightarrow |G_c(0)| \geq 2$$

O sea, que si la ganancia estática del controlador es mayor que 2, las derivas introducidas por el viento generarán un error de rumbo menor del 5%, siempre y cuando el sistema de control sea estable (si no, no tiene sentido aplicar el teorema del valor final).

Como se puede observar, que el sistema tenga un integrador no implica que se anulen las perturbaciones, pues estas son introducidas delante de él.

2. Se elige un regulador proporcional que cumpla el apartado anterior:  $G_c(s) = 2$

La ecuación característica es:

$$s(s+10)(s+20) + 4000G_c(s) = s^3 + 30s^2 + 200s + 8000$$

Se puede resolver por cualquier método. Por ejemplo aplicando Routh:

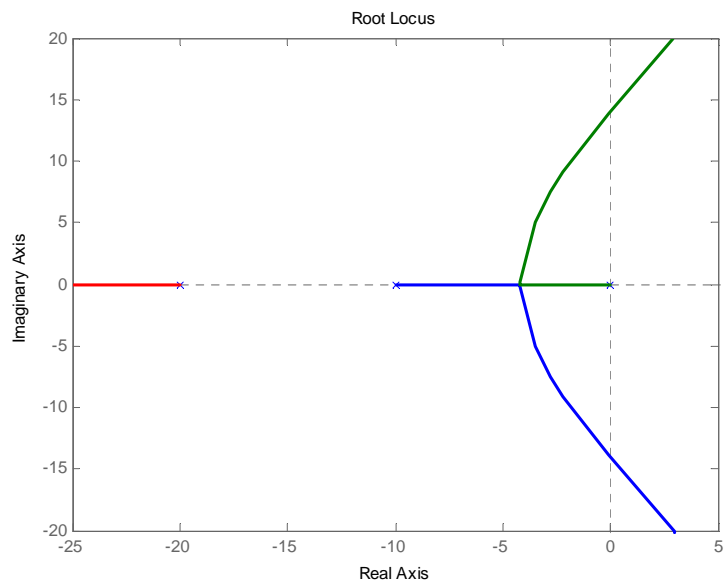
$s^3$	1	200
$s^2$	30	8000
$s^1$	-66.67	0
$s^0$	8000	

Por lo tanto con este regulador, el sistema resulta inestable (con dos polos inestables debido a los dos cambios de signo).

Se puede dibujar el lugar de las raíces y se ve que a partir de un valor de ganancia la parte real de dos de las raíces será positiva.

Se puede comprobar que para  $G_c \leq 1.5$  todas las raíces tienen parte real negativa.

Este resultado no contradice el apartado anterior. Que no se consiga estabilizar el sistema con un regulador proporcional de ganancia 2, no impide que sí se pueda estabilizar con un regulador

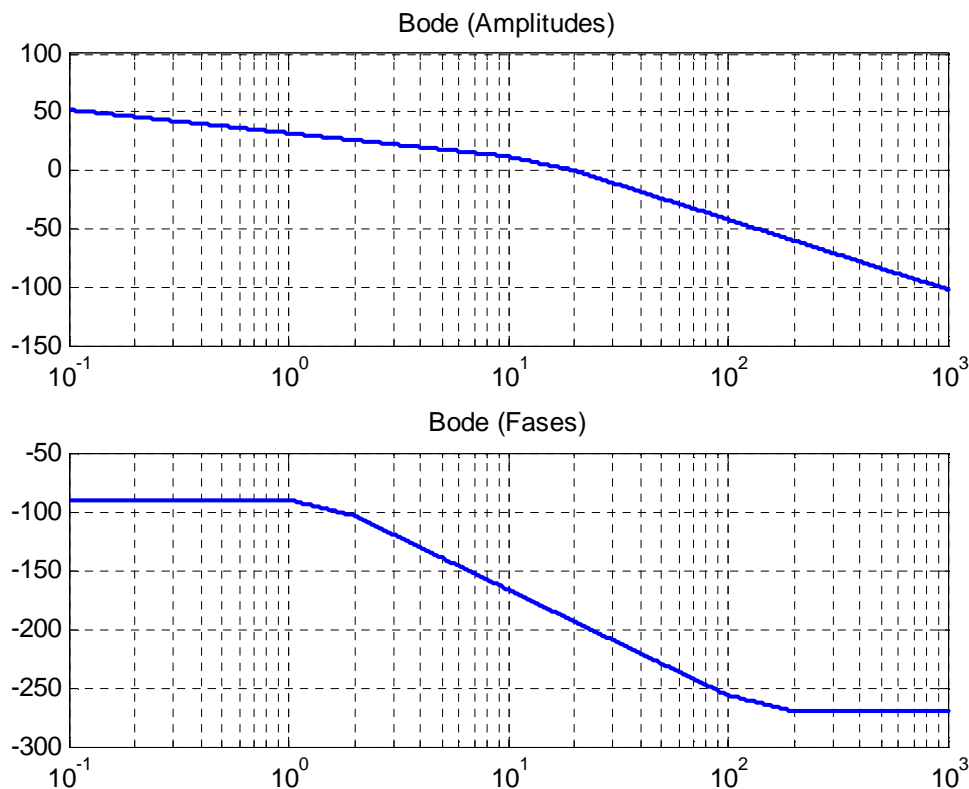


más complejo con ganancia estática mayor o igual a 2. En el siguiente apartado se va a trabajar en este sentido.

**3.** Si el compensador no puede disminuir el ancho de banda, está claro que habrá que emplear una red de adelanto de fase en lugar de una de retraso.

En primer lugar se dibuja el diagrama de Bode del sistema con la ganancia estática requerida para cumplir el primer apartado, o sea, de:

$$G'(s) = 2 * G(s) = 2 \frac{4000}{s(s+10)(s+20)}$$



A partir de él se obtiene el margen de fase del sistema sin compensar. En la gráfica se observa que para  $\omega = 20$  rad/s, el margen de fase es más o menos de  $-12^\circ$  (sale inestable como se había visto en el apartado anterior).

El objetivo en el problema son  $30^\circ$  (aunque las normativas de aviación suelen pedir al menos  $45^\circ$ ). Por lo tanto, si se emplea un margen de seguridad de  $8^\circ$ , se habrán de añadir:  $30^\circ - (-12^\circ) + 8^\circ = 50^\circ$  mediante la red de adelanto, que será de la forma:

$$G_c(s) = 2 \frac{p}{c} \frac{s+c}{s+p}$$

A partir del máximo aporte de fase ( $50^\circ$ ) se puede deducir la separación del cero y el polo:

$$\alpha = \frac{1 - \sin 50^\circ}{1 + \sin 50^\circ} = 0.1325 = \frac{c}{p}$$

Interesa colocar el máximo aporte de fase en la frecuencia en que es más necesario, o sea  $\omega_{cg}$  (frecuencia de cruce de ganancia), la cual se puede estimar en el diagrama de Bode. Como la red introduce un aporte de ganancia, es necesario calcularlo y descontarlo para encontrar la  $\omega_{cg}$ .

El incremento de ganancia a la frecuencia de máximo aporte de fase es de:

$$20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = 8.77 \text{ dB} \approx 9 \text{ dB}$$

Se busca por tanto la frecuencia a la que la ganancia es de -9 dB, como mejor estimación de la  $\omega_{cg}$  del sistema compensado. Se elige  $\omega_{-9\text{dB}} \approx 30 \text{ rad/s}$

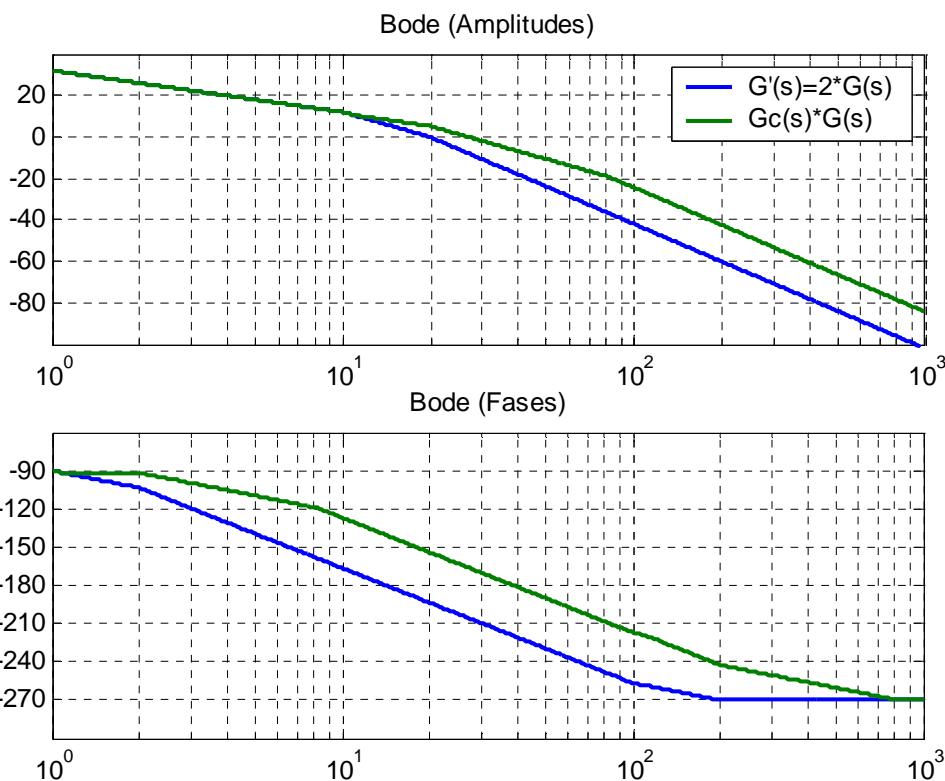
Se colocará pues la red de adelanto de modo que la frecuencia de máximo aporte de fase sea 30 rad/s. Esta frecuencia está en la media geométrica de las frecuencias del cero y el polo de la red, por lo que se pueden deducir ya ambos:

$$c = 30\sqrt{\alpha} = 10.92 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$p = \frac{30}{\sqrt{\alpha}} = 82.42 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

El compensador será pues:

$$G_c(s) = 2 \frac{p s + c}{c s + p} = 2 \frac{82.42 (s + 10.92)}{10.92 (s + 82.42)} = 15.1 \frac{(s + 10.92)}{(s + 82.42)}$$



El nuevo margen de fase es de  $15^\circ$  (trazando un diagrama de Bode real, en lugar del asintótico, sale un margen de fase de  $23^\circ$ ). Se puede incrementar el aporte máximo de fase para conseguir el objetivo. Si fueran necesarios más de  $65^\circ$  habría que recurrir a dos redes en cascada, ya que conseguirlos con una sola presenta problemas de implementación.

**4.** Cuando el controlador se implementa en un dispositivo digital, es habitual introducir un filtro antialias analógico a la entrada que va a ser muestreada. En el enunciado no se habla de filtro, por lo tanto se elegirá la frecuencia de muestreo sin tenerlo en cuenta.

Sin filtro, puede ser suficiente una frecuencia de muestreo de 20 – 40 veces más rápida que la de cruce de ganancia del sistema. Multiplicando por 25:

$$\omega_m = 25 \cdot 30 \text{ rad/s} = 750 \text{ rad/s}$$

$$T_m = 2\pi/750 \text{ s} = 8.4 \text{ ms}$$

**5.** A la vista del lugar de las raíces del enunciado se deduce que el compensador está compuesto de un cero en -2 y un polo en el origen (de otro modo no podrían salir las dos ramas de ese punto).

$$G_c(s) = k \frac{s+2}{s}$$

**5.a.** Como el controlador tiene un polo en  $s=0$ , aplicando el teorema del valor final como en el apartado 1 se obtiene:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s} \frac{-40(s+10)}{s(s+10)(s+20) + 4000G_c(s)} = \frac{-400}{0 + \lim_{s \rightarrow 0} 4000G_c(s)} = \frac{-400}{\infty} = 0$$

Hará que el efecto de una perturbación de tipo escalón se anule en régimen permanente, independientemente del valor de  $k$

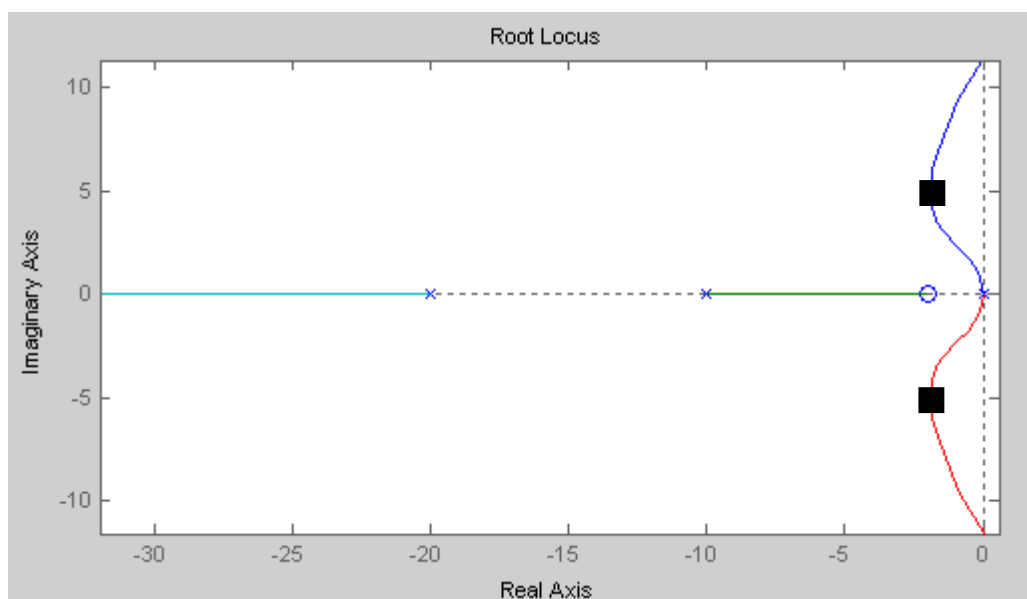
**b.** La función de transferencia del regulador es:

$$G_c(s) = k \frac{s+2}{s}$$

Es un regulador de tipo PI (proporcional-integral).

**c.** Las especificaciones de diseño en este problema están limitadas al lugar de las raíces entregado. Habrá pues que elegir el punto del plano complejo que, perteneciendo al lugar, corresponda con las especificaciones más deseables para el sistema de control.

La dinámica va a ser dominada por los dos polos complejos conjugados, más significativos que los dos reales que aparecen.



Por lo tanto las mejores características de sobreoscilación y de tiempo de establecimiento para este par de polos se pueden encontrar cuando su parte real es más negativa. Se elige pues como punto de especificaciones el  $-2 \pm 5j$ .

Aplicando el criterio del módulo se puede obtener el valor de  $k$  para esos polos:

$$k=0.255$$

El regulador queda así:  $G_c(s) = 0.255 \frac{s+2}{s}$

**d.** El sistema realimentado tendrá como ceros los ceros del compensador (-2) y los del propio sistema (que no tiene).

Los polos del sistema realimentado serán los dos polos complejos conjugados que se han elegido de especificaciones ( $-2 \pm 5j$ ), y dos polos reales adicionales en las dos ramas restantes. Se puede calcular estos últimos dividiendo la ecuación característica por el polinomio generado por los dos complejos conjugados y resolviendo la ecuación de segundo grado:

La ecuación característica es:

$$s^2(s+10)(s+20) + 0.255 \cdot 4000(s+2) = s^4 + 30s^3 + 200s^2 + 1022s + 2044$$

Dividiendo por  $(s+2-5j)(s+2+5j) = s^2 + 4s + 29$

Resulta:  $s^2 + 26s + 67$

Por lo tanto las dos raíces reales son: -2.9 y -23.1 respectivamente.

Con todos los datos, ya se puede comentar las contribuciones de cada uno de los elementos, analizando por ejemplo la respuesta del sistema realimentado ante un escalón de referencia.

- Los dos polos complejos conjugados (dominantes) darán una respuesta subamortiguada, con una sobreoscilación de 28,5% y un tiempo de pico de 0,63 s.
- El cero (-2) está bastante cercano a uno de los polos (-2,9). Ambos están próximos a los polos dominantes, y su influencia sería relativamente grande, si no fuera porque sus efectos se contrarrestan en buena parte. De todos modos, al ser más significativo el cero que el polo, será esta última, atenuada, la influencia que se observará: un incremento en la sobreoscilación, y una leve disminución del tiempo de pico.
- Por último queda considerar el polo en -23,1 que dada su lejanía relativa, pues está a más de  $10\sigma$  (siendo  $\sigma = 2$  la distancia de los polos dominantes al eje imaginario), se puede despreciar su efecto.

**Problema 2. (4,5 puntos)<sup>1</sup>**

En la figura adjunta se muestra un diagrama esquemático de un proceso de colada continua para la producción de *blooms* (bloques rectangulares de acero para su procesamiento posterior)

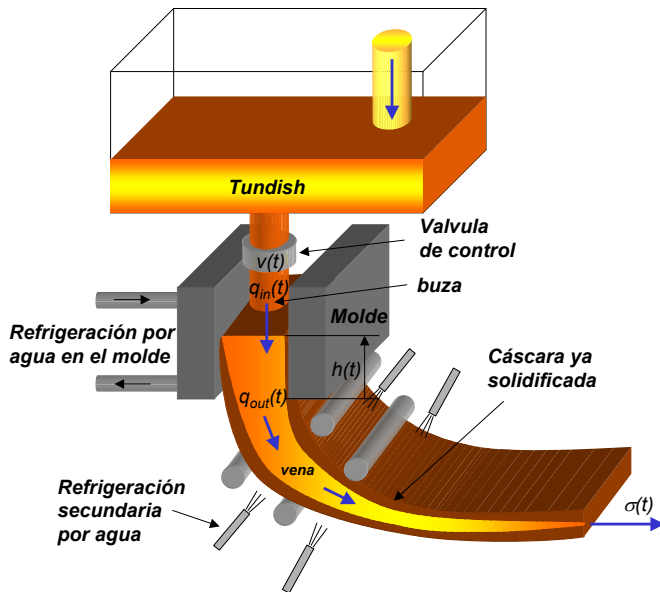


Figura 1: Diagrama esquemático de un proceso de colada continua.

**Descripción del proceso.** En el sistema de colada continua, el *tundish* puede verse como un gran depósito contenedor que actúa como reserva de acero líquido. Una válvula de control regula el flujo de acero,  $q_{in}(t)$  que entra en el molde situado bajo el *tundish*. El molde está sometido a una intensa refrigeración por agua que produce una capa sólida externa en el acero que actúa como contenedora de la *vena* interna de acero líquido. En este estado, el acero es suficientemente firme para ser conducido mediante cilindros aguas abajo donde más tarde serán cortados los *blooms*. Este proceso permite una producción continua de acero sin interrupción.

<sup>1</sup>Fuente: Problema basado y adaptado de un ejemplo de Goodwin et al. “Control System Design” Ed. Prentice Hall, pp. 23 y ss.

**Especificaciones.** En el proceso resulta especialmente importante el control de nivel de acero del molde por varias razones:

- *Seguridad:* El molde nunca debe rebosar ni quedar vacío. Cualquiera de estos eventos tendría consecuencias desastrosas y, por tanto es muy importante trasladar esto a las especificaciones del control de  $h(t)$ .
- *Productividad:* El sistema debe adaptarse a los requerimientos de producción, que se traducen en variaciones del caudal de salida  $q_{out}(t)$  la cual es función directa de la velocidad de la colada,  $\sigma(t)$ , que a su vez depende de factores como la demanda de producto, etc.
- *Calidad:* Cambios rápidos en el nivel de acero en el molde  $h(t)$  reducen la calidad del acero debido a las turbulencias, que pueden originar inclusiones, impurezas y pérdida de homogeneidad en la solidificación, lo que deteriora la uniformidad y propiedades mecánicas del bloom.
- *Mantenimiento:* Debido a reacciones de oxidación, la *buza*<sup>2</sup> sufre un intenso desgaste a la altura del nivel de acero del molde,  $h(t)$  y que se agrava si éste sufre variaciones bruscas. Adicionalmente, los costes de mantenimiento se reducen aún más si se emplean movimientos poco agresivos en la válvula de control.

**Ecuaciones del modelo.** Nivel del molde

$$h(t) = \int_{-\infty}^t (q_{in}(\tau) - q_{out}(\tau)) d\tau$$

Por simplicidad, supondremos que las medidas de la posición de la válvula,  $v(t)$  y de la velocidad de

<sup>2</sup>En inglés *nozzle*, conducto por el que entra el acero líquido al molde.

la colada  $\sigma(t)$  son calibradas de forma que indican directamente los flujos de entrada y salida

$$\begin{aligned}v(t) &= q_{in}(t) \\ \sigma(t) &= q_{out}(t)\end{aligned}$$

El sensor que mide el nivel de acero en el molde es objeto de ruido de alta frecuencia debido a las condiciones adversas de trabajo

$$h_m(t) = h(t) + n(t)$$

donde  $h_m(t)$  es la medida de  $h(t)$  corrompida por el ruido  $n(t)$ .

**Sistema de control.** Se decide implementar un sistema de control que actúe sobre la válvula  $v(t)$  para controlar el nivel de acero  $h(t)$  en el molde en el contexto descrito anteriormente.

Se pide:

- Trazar un diagrama de bloques del sistema de control, indicando claramente el proceso, las variables y las perturbaciones que afectan al sistema.
- Suponiendo un control de tipo proporcional  $R(s) = K$ , dibujar las funciones de sensibilidad  $S(j\omega)$ ,  $T(j\omega)$ ,  $S_u(j\omega)$ ,  $S_i(j\omega)$  –pueden trazarse las curvas de módulos asintóticas–. Razonar sobre ellas la influencia del parámetro  $K$  en cuanto a:
  - seguimiento de referencias
  - acción de control
  - efecto de las perturbaciones
  - variaciones en el proceso (p. ej. modificaciones en la geometría del molde)
- Suponiendo que existe un sensor que mide la velocidad de la colada continua,  $\sigma(t)$ , sugerir una estructura que explote dicho conocimiento para reducir el efecto de la perturbación. ¿En qué aspectos mejoraría el sistema de control con esta nueva arquitectura?

- Una idea para reducir el efecto del ruido de medida  $n(t)$  en el sensor de nivel es incluir un filtro pasabajos que “suavice” dicha medida. Razonar pros y contras de esta solución.

---

**Cuestión. (1 pt)**

Explica de manera resumida con tus propias palabras qué es y cómo funciona un PLC.

---



## Soluciones

### Problema 1

#### Diagrama de bloques del proceso.

A partir de la información sobre el proceso que nos da el enunciado, el *diagrama estructural*, que describe las interacciones entre los distintos elementos del proceso, queda como sigue:

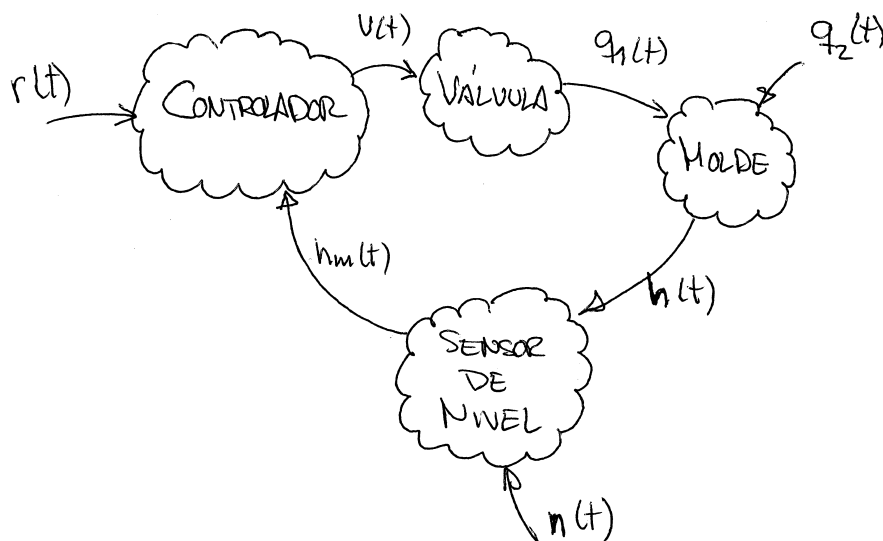


Figura 4: Diagrama estructural del sistema de control de nivel en el proceso de colada continua.

Por la ley de la conservación de la masa (ecuación del molde en el enunciado) el molde se comporta como un integrador del caudal neto  $q_{neto} = q_{in} - q_{out}$  entrante en el mismo. El regulador es proporcional, de ganancia  $K$  y el sensor, en principio tiene ganancia unitaria. Fácilmente, se obtiene el diagrama de bloques, del sistema, que queda como sigue

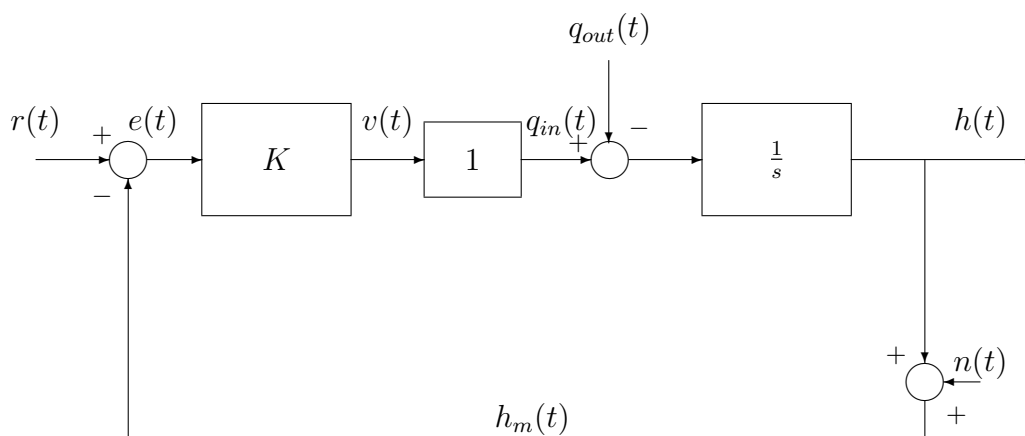


Figura 5: Diagrama de bloques del sistema de control.

### Análisis mediante funciones de sensibilidad

Las funciones de sensibilidad para un regulador proporcional genérico  $R(s) = K$  pueden calcularse fácilmente. En efecto, denotando el regulador  $C(s) = K$ , y el proceso  $P(s) = 1/s$  se tiene:

$$S = \frac{1}{1 + CP} = \frac{1}{1 + K/s} = \frac{s}{s + K}$$

$$T = \frac{CP}{1 + CP} = \frac{K/s}{1 + K/s} = \frac{K}{s + K}$$

$$S_u = \frac{C}{1 + CP} = \frac{Ks}{s + K}$$

$$S_i = \frac{P}{1 + CP} = \frac{1}{s + K}$$

Las 4 funciones de sensibilidad para valores de  $K$  y de  $5K$  se muestran en la figura 6. Del análisis de las funciones de sensibilidad se pueden extraer las siguientes conclusiones:

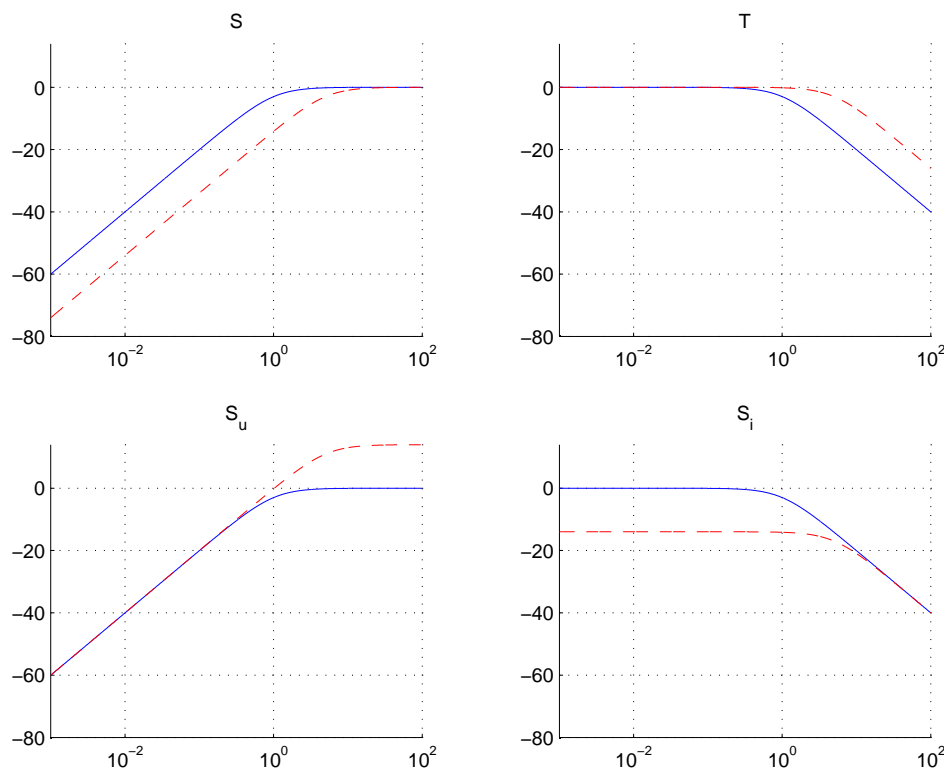


Figura 6: Funciones de sensibilidad para  $K$  –línea continua– y para  $5K$  –línea a trazos.

- En cuanto al *seguimiento de las referencias* de nivel, un valor más elevado de  $K$  no mejora el error en régimen permanente y a bajas frecuencias, que en ambos casos es cero o muy pequeño en ausencia de perturbaciones. Esto puede apreciarse a través de la función de sensibilidad

complementaria en el origen,  $T(0)$ , y a bajas frecuencias, es decir,  $T(j\omega)$  para frecuencias hasta hasta  $\omega \approx K$ .

- En cuanto a la *dinámica del seguimiento de las referencias de nivel*, valores elevados de  $K$  permiten un seguimiento más rápido, lo que se aprecia a través de un mayor ancho de banda de  $T(j\omega)$ . No obstante, por las características del proceso, esto no es necesario, por lo que no constituye una ventaja importante, e incluso es una desventaja, ya que las variaciones bruscas de nivel en el molde deterioran la calidad del acero.
- La *acción de control*, descrita por  $S_u(j\omega)$  es superior a frecuencias altas (frecuencias por encima de  $\omega \approx K$ ) para valores altos de  $K$ , lo que indica que el regulador  $5K$  va a generar variaciones bruscas en el caudal de la válvula que provocarán un desgaste rápido de la misma.
- El *rechazo a las perturbaciones* viene descrito por la función de sensibilidad  $S(j\omega)$  y en particular por la función de sensibilidad de entrada  $S_i(j\omega)$ , que describe el específicamente rechazo a perturbaciones de carga. En este caso la perturbación de carga es la velocidad de la colada continua,  $\sigma(t)$ . Puede observarse que en este aspecto es superior el regulador con ganancia elevada,  $5K$ . Vemos en ambas funciones de sensibilidad cómo éste permite compensar mejor variaciones en la producción  $\sigma(t)$ .
- En cuanto al *ruido de medida*  $n(t)$ , dominado por las altas frecuencias, podemos comprobar cómo reguladores con elevada acción proporcional producen amplitudes de  $T(j\omega)$  mayores a altas frecuencias. Por tanto el regulador  $5K$  es más sensible al ruido de alta frecuencia proveniente del sensor de nivel, lo que repercute en el nivel  $h(t)$ , originando variaciones bruscas en el mismo que afectan negativamente a la calidad del acero.
- Podemos también razonar sobre la estabilidad del proceso atendiendo al máximo de la función de sensibilidad  $S_{max} = \max_{\omega} |S(j\omega)|$ . Vemos que el sistema es muy estable en ambos casos, dado que dicho valor no supera los 0 dB. No obstante, el sistema real puede tener actuadores y sensores lentos (por ejemplo, el filtro sugerido en la última pregunta del problema) que dan lugar a funciones de sensibilidad con resonancias y por tanto con menor estabilidad relativa de la que apreciamos aquí.

### Arquitecturas alternativas

Si se dispone de una medida de la velocidad de la colada continua,  $\sigma(t)$ , a través de un sensor o de un ordenador de proceso, es posible utilizarla para resolver algunos de los compromisos contradictorios del análisis anterior. En dicho análisis, ganancias elevadas permiten reducir el efecto de  $\sigma(t)$ , pero a costa de la acción de control,  $v(t)$ , (lo que produce desgaste de la válvula) y de incrementar el ancho de banda de  $T(j\omega)$  (lo que no interesa ya que el nivel del molde no debe variar rápido y dado que el efecto del ruido se hace mayor). Ganancias bajas, producen los efectos justo al revés.

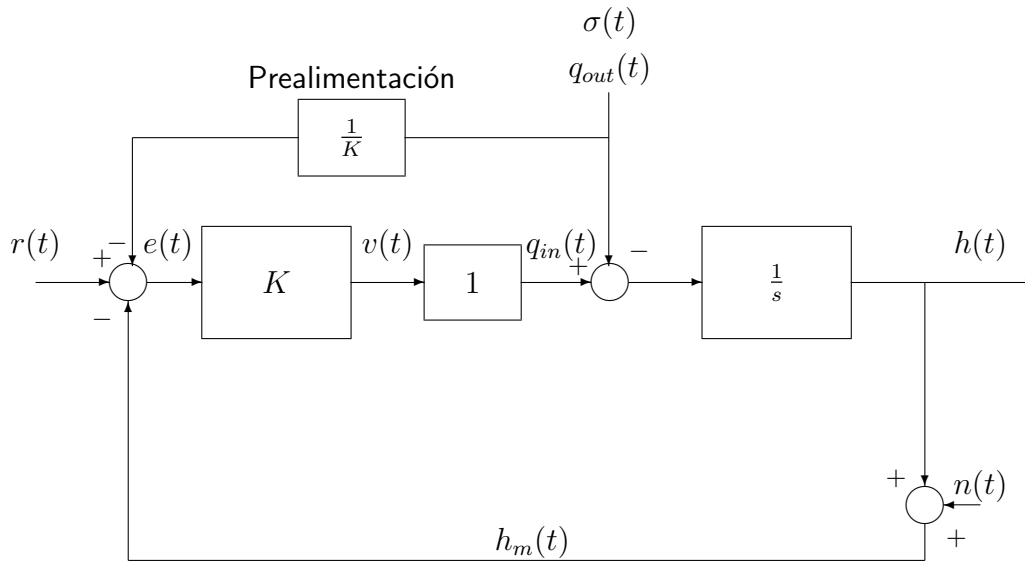


Figura 7: Prealimentación de la demanda de producción  $\sigma(t) = q_{out}(t)$ .

Mediante una prealimentación de la perturbación medible,  $\sigma(t)$ , y utilizando el regulador de ganancias bajas  $R(s) = K$ , sólo se incrementa la acción cuando es necesario (ante cambios en la perturbación), dejando inalteradas las funciones de sensibilidad del lazo, y por tanto dejando acotado el ancho de banda de  $T(j\omega)$  y la acción de control  $S_u(j\omega)$ , que describe la acción de control ante otras perturbaciones distintas a  $\sigma(t)$  –como por ejemplo el ruido del sensor  $n(t)$ .

### Efecto de un filtro pasabajo en el sensor

La inclusión de un filtro pasabajo en el sensor, tiene sus ventajas y sus desventajas.

La principal ventaja es la reducción de ruidos. Habitualmente, un sensor bien calibrado suele tener buen comportamiento y fidelidad en continua y en bajas frecuencias, siendo los errores de medida dominados por las altas frecuencias. Con un filtrado pasabajos se consigue preservar el contenido de baja frecuencia (donde el sensor es “bueno”) y atenuar las componentes de alta frecuencia, (donde se encuentran las imprecisiones). Explicado desde otro punto de vista puede decirse que se consigue, en general, mayor precisión (repetibilidad) al asemejarse el filtro pasabajo, en realidad, a un promedio temporal de medidas consecutivas, lo que consigue disminuir la varianza de las medidas.

El principal inconveniente es una reducción genérica en el ancho de banda del sistema (se reduce el ancho de banda de las funciones de sensibilidad). Si suponemos un filtro de un polo (con más polos el efecto es equiparable en lo cualitativo) éste introduce retrasos de fase y pérdidas de ganancia en la función de bucle  $L(j\omega)$ , lo que se traduce en incremento de la sensibilidad  $S(j\omega)$  y reducción del ancho de banda.

Las cuatro funciones de sensibilidad (en este caso incluyendo el sensor)

$$S = \frac{1}{1 + CPH}, \quad T = \frac{CP}{1 + CPH}$$

$$S_u = \frac{C}{1 + CPH}, \quad S_i = \frac{P}{1 + CPH}$$

se muestran en la figura adjunta para el controlador proporcional de ganancia  $K = 1$  y, respectivamente, un sensor ideal (trazo continuo), un sensor de ganancia  $K_s = 1$  y constante de tiempo  $T = 2$  (línea discontinua) y un sensor de  $K_s = 1$  y  $T = 5$ .

En ellas puede apreciarse cómo el retraso de fase introducido por el sensor acrecienta la sensibilidad y hace al sistema más inestable y oscilatorio, mientras que la pérdida de ancho de banda del sensor, hace que el sistema rechace peor las perturbaciones rápidas (aunque el ancho de banda en el seguimiento de referencias no se ve excesivamente afectado).

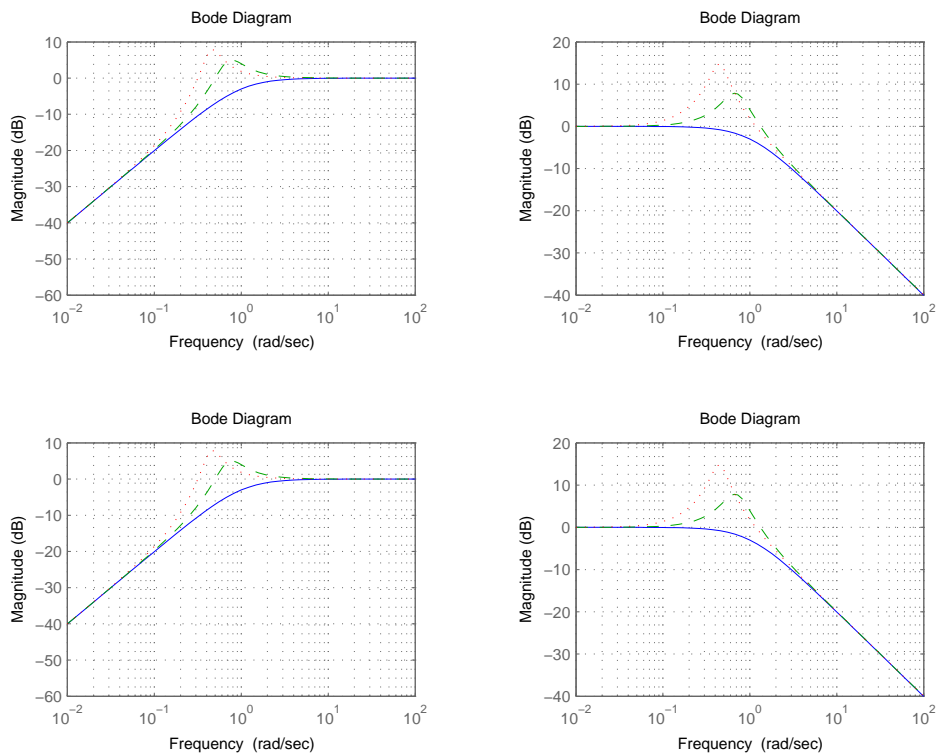


Figura 8: Funciones de sensibilidad del sistema para sensor ideal, sensor lento  $T = 2$  seg. y sensor más lento  $T = 5$  seg.