

Problema. Se desea controlar el ángulo θ del aeropéndulo de la figura, consistente en una barra que gira respecto a un pivote, una masa m_A en un extremo y un propulsor de masa m_B en el otro, consistente en una hélice y un motor. El propulsor produce una fuerza de 1N por cada voltio aplicado al motor. La masa de la barra se considera despreciable y el momento de inercia del conjunto respecto al pivote es J . El balance de momentos viene dado por la siguiente ecuación:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = m_A g d_A \cos(\theta) - m_B g d_B \cos(\theta) + d_B F$$

Datos

- $m_A = 0.2 \text{ kg}$
- $m_B = 0.05 \text{ kg}$
- $d_A = 0.2 \text{ m}$
- $d_B = 0.4 \text{ m}$
- $g = 10 \text{ m/s}^2$
- $J = 0.016 \text{ kg m}^2$
- $m_{\text{asim}} = 0.001 \text{ kg}$
- $d_{\text{asim}} = 0.1 \text{ m}$
- $G_{\text{prop}} = 1 \text{ N/V}$

Para diseñar el sistema de control se mide el ángulo θ mediante un encoder, se compara con un ángulo de referencia θ^* y en función del error se genera una tensión u aplicada al propulsor, el cual produce una fuerza F que permite corregir las desviaciones de θ respecto a θ^* .

Se pide:

- Obtener un modelo lineal de la ecuación válido en torno al punto de equilibrio definido por $\theta=0$. Determinar el valor F_0 de la fuerza en el equilibrio y la función de transferencia $G(s)$ entre la fuerza F y el ángulo θ .
- Obtener el diagrama de bloques del sistema de control, indicando claramente todos los elementos.
- Diseñar el regulador más sencillo del tipo $C(s) = k_p k_i / s + k_d s$ que permita controlar la planta con un tiempo de establecimiento de 3 seg. y una sobreoscilación del 4.3%. Si fuese necesario, diseñar un prefiltro $F(s)$, explicando el porqué de su uso.
- Calcular el error de posición e_p en p.u.
- Calcular el error en grados si se ubica una masa asimétrica de 1g a una distancia de 0.1 m del pivote en el lado B.

IMPORTANTE:

- Entregar todo en **UNA SOLA HOJA**.
- Se valorará la **claridad y concisión** en los desarrollos y explicaciones.
- Justificar adecuadamente los resultados. Aunque sean correctos podrán no tener validez si no se han justificado o si la justificación no es correcta.
- Las **faltas de ortografía** y los **errores en las operaciones** podrán penalizar el ejercicio.

Ecuación del sistema

$$J \frac{d^2 \theta}{dt^2} = m_A \cdot g \cdot d_A \cdot \cos \theta - m_B \cdot g \cdot d_B \cdot \cos \theta + d_B \cdot F$$

Equilibrio ($\theta_0 = 0$, $\frac{d}{dt} = 0$)

$$0 = (m_A g d_A - m_B g d_B) \cos \theta_0 + d_B F_0$$

$$\rightarrow \boxed{F_0 = \frac{m_A g d_A - m_B g d_B}{d_B} = -0.5 \text{ Nm}}$$

(debe ejercer una fuerza hacia abajo para mantener el equilibrio)

Taylor

para la única expresión no lineal:

$$\Delta \cdot \underbrace{(m_A g d_A - m_B g d_B)}_{KTE} \cos \theta \approx \left. \frac{\partial [KTE \cos \theta]}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_0} \cdot \Delta \theta =$$

$$= -KTE \sin \theta_0 \cdot \Delta \theta = \underline{\underline{0}}$$

el resto de los términos son lineales

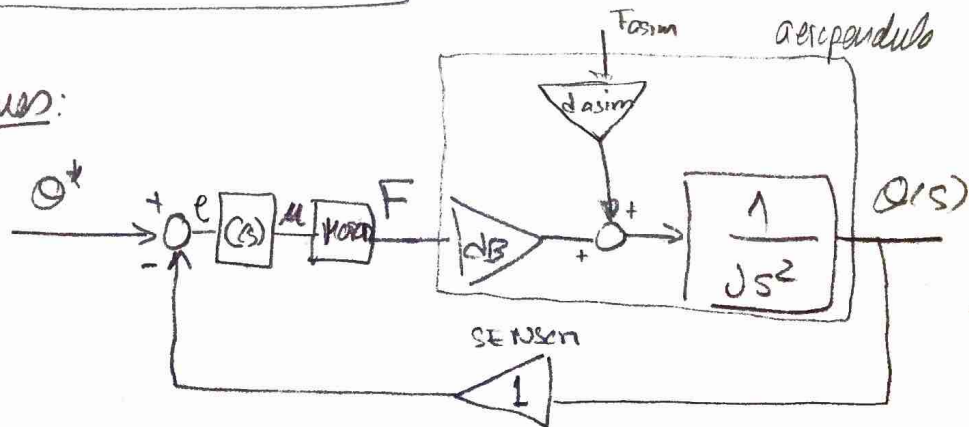
E. referencial lineal

$$J \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = \cancel{0 \cdot \Delta \theta} + d_B \cdot \Delta F \rightarrow \boxed{J \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} = d_B \cdot \Delta F}$$

Laplace:

$$\boxed{\Theta(s) = \frac{d_B}{J s^2} \cdot F(s)}$$

Diagrama de bloques:



Diseño del controlador

$$t_s - 3 \text{ seg} = \frac{3}{\sigma} \rightarrow \sigma = 1$$

$$\sigma = 1$$

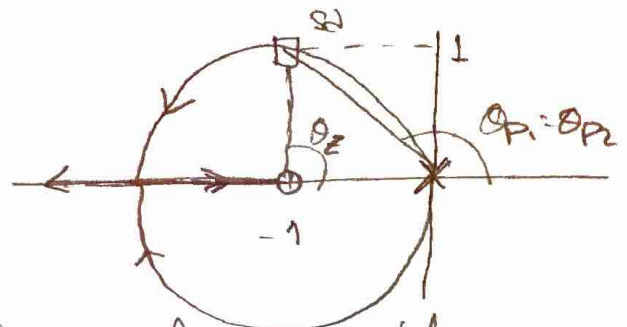
$$z = -1 \pm j$$

$$M_p = 4.3\% = 0,043 (\text{p.u.}) = e^{-\pi \rho / \sigma \theta}$$

$$\theta = 45^\circ$$

Ec. característica

$$1 + K_{LR} \times \frac{1}{s^2} = 0$$



Criterio del argumento para determinar la posición del cero:

$$\theta_{p1} + \theta_{p2} - \theta_z = 180^\circ \cdot (2q + 1)$$

$$135^\circ + 135^\circ - \theta_z = 180^\circ \rightarrow \theta_z = 270^\circ - 180^\circ = \underline{\underline{90^\circ}}$$

Criterio del módulo

$$K_{LR} = \frac{\prod |d_{pi}|}{\prod |d_{zi}|} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{1} = 2$$

por tanto, el cero está situado justo debajo de σ (en la vertical)

$$K_{LR} = 2 = K \times dB \cdot \frac{1}{J} \rightarrow K = \frac{2 \times J}{dB} = \frac{2 \times 0,016}{0,4} = 0,08$$

$$C(s) = 0,08 \cdot (s+1) \rightarrow K_p = 0,08$$

$$K_d = 0,08$$

Error de posición

$$e_p = \frac{1}{1+L(s)} = 0 \rightarrow \text{Sistema tipo II } L(s) = \infty$$

Error con masa asimétrica

$$F_{asim} = 0,001 \times 50 \quad S_i(s) =$$

$$\frac{\text{dosim} \frac{1}{s^2}}{1 + K \cdot (s+c) \cdot dB \cdot \frac{1}{s^2}} = \frac{\text{dosim}}{s^2 + 0,08(s+1)dB}$$

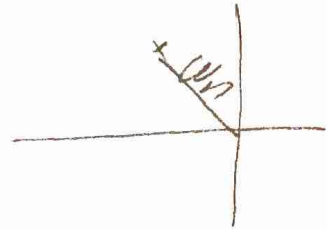
$$\Delta \theta = S_i(0) \times F_{asim} = \frac{\text{dosim}}{0,08 \times 1 \times dB} \times F_{asim} = 0,0312 \text{ rads} \times \frac{180}{\pi} = \underline{\underline{1,8^\circ}}$$

Eleccion del periodo de muestreo

No hay frecuencias de alarmas (segun enunciado)

→ $\omega_m \approx 240 \text{ rad/s}$ → algunos $\omega_m = d \cdot \omega_{cg}$

$\omega_{cg} \approx$ ancho de banda $\approx \omega_m$



$$\omega_{cg} = 1.414 \rightarrow T_m = 0.11 \text{ seg}$$

aplicandoustin $\left(s = \frac{z}{\omega} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)$

$$C(z) = \frac{1.52 - 1.36z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

Ec. en diferencias del controlador

$$F_k = F_{k-1} + 1.52e_k - 1.36e_{k-1}$$

$$\text{modo } e_k = \theta_k^* - \theta_k$$