Sistemas Automáticos | Septiembre | 14 Septiembre 2006, 9:00
4º Industriales

1. Cuando un submarino permanece sumergido en una posición estática, es necesario mantenerlo equilibrado en posición horizontal. Para ello se necesita que las dos fuerzas que actúan sobre él, su peso y el empuje del agua, se ejerzan sobre el mismo eje; en caso contrario, el submarino experimentará un par que le causará una inclinación. Para lograr mantener el submarino equilibrado, éste dispone de unos tanques (tanques de *trimado*) entre los que se puede bombear agua, cambiando de esta forma la posición del centro de masas. El sistema se puede considerar dividido en dos subsistemas. El primero de ellos, G_1, modifica la posición del centro de masas del submarino en función de la tensión aplicada a un motor de corriente continua (bomba); mientras el segundo, G_2, representa la inclinación del submarino en función de la posición del centro de masas. En ocasiones, para determinadas operaciones, será necesario que el submarino tome una ligera inclinación respecto al eje horizontal. El

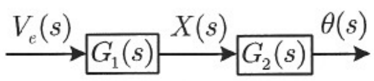


Figura 1: Funciones de transferencia del sistema

subsistema G_1 se controla desde la entrada de tensión del motor, siendo las ecuaciones de este motor:

$$V_e(t) - F_{em}(t) = R \cdot i(t) \tag{1}$$
$$T_1(t) = K_p i(t) \tag{2}$$
$$F_{em}(t) = K_m \omega_1(t) \tag{3}$$

donde V_e es la tensión de alimentación del motor, F_{em} es la fuerza contraelectromotriz, i es la corriente que circula por el motor, T_1 es el par generado por el motor y ω_1 es la velocidad de giro del motor. R, K_p y K_m son constantes.

El par generado por el motor, $T_1(t)$, se emplea para arrastrar una bomba hidráulica, siendo su expresión:

$$T_1(t) = J_1 \frac{d\omega_1(t)}{dt} + B_1 \omega_1(t) \tag{4}$$

donde J_1 es la constante de inercia de la bomba y B_1 la constante de fricción viscosa.

El caudal de agua desplazado por la bomba, $q(t)$, es

$$q(t) = K_b \omega_1(t) \tag{5}$$

donde K_b es una constante.

En función de la cantidad de agua desplazada entre los tanques trasero y delantero, la distancia entre el centro de gravedad y el centro de flotación $x(t)$ se puede expresar como:

$$x(t) = K_x \int q(t)\, dt \tag{6}$$

donde K_x es una constante.

La entrada al subsistema G_2 es la distancia, $x(t)$, entre el centro de masas y el centro de flotación del submarino. En función de esta distancia el submarino experimenta un par de giro

$$T_2(t) = F \cdot x(t) \cdot \cos\theta(t) \tag{7}$$

El problema continúa en el reverso de la página.

siendo F una constante, T_2 el par de giro, y θ el ángulo de inclinación del submarino.

Este par, provoca un giro en el submarino de velocidad ω, según la ecuación

$$T_2(t) = J_2 \frac{d\omega(t)}{dt} + B_2 \omega(t) \tag{8}$$

donde J_2 es la constante de inercia del submarino y B_2 es la constante de fricción.

El ángulo de inclinación del submarino responde a la expresión

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \tag{9}$$

(a) Obtener el sistema de ecuaciones en transformadas de Laplace en el punto de funcionamiento definido por $\theta_0 = 0$.

(b) Dibujar es diagrama de bloques correspondiente al subsistema G_1 mostrando *todas* las variables utilizadas en la descripción del problema.

(c) Dibujar el diagrama de bloques correspondiente al subsistema G_2 mostrando *todas* las variables utilizadas en la descripción del problema.

(d) Calcular las funciones de transferencia entre la entrada y la salida para cada uno de los subsistemas: $G_1(s) = \frac{x(s)}{V_e(s)}$ y $G_2(s) = \frac{\theta(s)}{x(s)}$.

(e) Calcular la función de transferencia correspondiente al sistema completo. Dibujar y definir de manera aproximada la respuesta del sistema ante un escalón unitario en la entrada.

(f) Diseñar un sistema de control automático que permita mantener la inclinación del submarino en el valor deseado. Por razones de espacio y economía se permite un *máximo* de dos sensores para medir dos variables a elegir del sistema. Debe incluirse un diagrama de bloques del sistema y la descripción de los elementos de control elegidos.

(g) Definir y justificar las especificaciones que podrían exigírsele a este sistema de control.

(h) Sintonizar el sistema diseñado en base a las especificaciones dadas en el apartado anterior.

(i) Describir la respuesta del submarino con el sistema de control diseñado ante una entrada escalón en la consigna de inclinación de 4 unidades.

Valores de las constantes: $R = 4$, $K_m = 1$, $K_p = 2$, $J_1 = 10{,}5$, $B_1 = 3$, $K_b = 2$, $K_x = 4$, $F = 100$, $J_2 = 50$, $B_2 = 500$. Todas las constantes y variables se ofrecen en unidades del Sistema Internacional.

Nota: Los valores de estas constantes no representan ningún caso real.

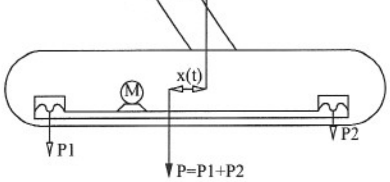


Figura 2: Diagrama de las fuerzas que actúan sobre el submarino.

Fin del problema. No olvidar escribir el nombre y apellidos antes de entregar.

Resolución del problema

a) Cálculo del punto de equilibrio:

$\Theta_0 = 0$

En el punto de equilibrio las ecuaciones quedan:

(1) $V_{e0} - F_{em0} = R \cdot i_0 \xrightarrow{(2)\,y\,(3)} V_{e0} = 0$

(2) $T_{10} = K_p \cdot i_0 \xrightarrow{(4)} i_0 = 0$

(3) $F_{em0} = K_m \cdot \omega_{10} \xrightarrow{(5)} F_{em0} = 0$

(4) $T_{10} = B_1 \cdot \omega_{10} \xrightarrow{(5)} T_{10} = 0$

(5) $q_0 = K_D \omega_{10} \xrightarrow{(6)} \omega_{10} = 0$

(6) $x_0 = k_x \cdot \int_0^0 q(t)\,dt = 0 \rightsquigarrow \frac{dx(t)}{dt} = k_x \cdot q(t) \rightsquigarrow q_0 = 0$

(7) $T_{20} = 0$

(8) $0 = B_2 \cdot \omega_0 \longrightarrow \omega_0 = 0$

(9) $\omega_0 = 0$

Todas las variables toman el valor 0 en el punto de equilibrio

Transformadas de Laplace.

(1) $\xrightarrow{\mathcal{L}} V_e(s) - F_{em}(s) = R\,i(s)$

(2) $\xrightarrow{\mathcal{L}} T_1(s) = K_p\,i(s)$

(3) $\xrightarrow{\mathcal{L}} F_{em}(s) = K_m \cdot \omega_1(s)$

(4) $\xrightarrow{\mathcal{L}} T_1(s) = J_1 s\omega_1(s) + B_1\omega_1(s)$

(5) $\xrightarrow{\mathcal{L}} q(s) = K_D \omega_1(s)$

(6) $\xrightarrow{\mathcal{L}} x(s) = K_x \frac{q(s)}{s}$

(7) No lineal $\longrightarrow$ Hay que obtener su aproximación lineal en el punto de funcionamiento

(8) $\xrightarrow{\mathcal{L}} T_2(s) = J_2 s\omega(s) + B_2\omega(s)$

(9) $\xrightarrow{\mathcal{L}} \omega(s) = s\Theta(s)$

Aproximación lineal de (7):

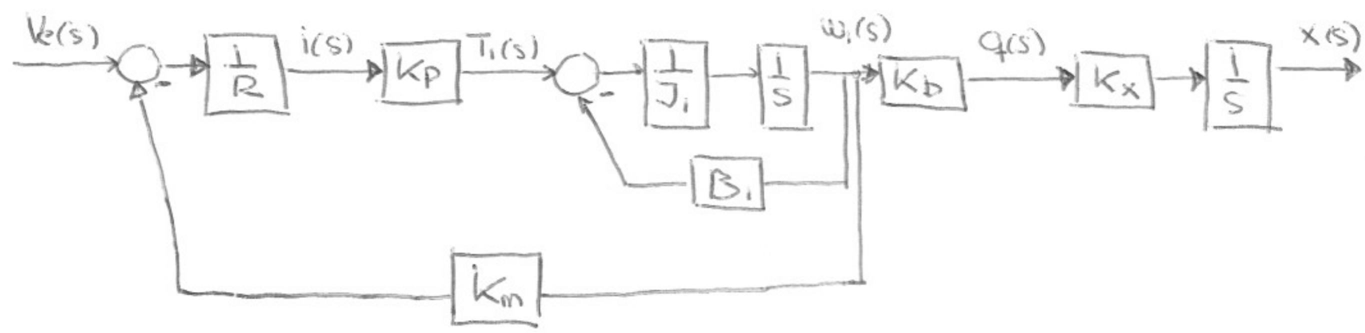
$$T_2(t) = F\cdot x(t)\cdot \cos\theta(t) \xrightarrow{A.L.} \Delta T_2(t) = F\cdot \underbrace{\cancel{\cos\theta_0}}_{1}\,\Delta x(t) - F\cdot x_0 \underbrace{\cancel{\operatorname{sen}\theta_0}}_{0}\,\Delta\theta(t) =$$

$$\Delta T_2(t) = F\,\Delta x(t)$$

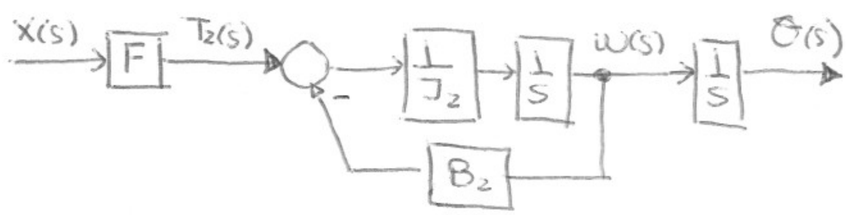
$$\downarrow \mathcal{L}$$

$$T_2(s) = F\,X(s)$$

b)



c)



d)

$$\boxed{\frac{X(s)}{V_e(s)}} = \frac{\frac{1}{R}\cdot K_p\,\frac{1}{J_1 s + B_1}}{1 + \frac{1}{R}K_p\,\frac{1}{J_1 s + B_1}\,K_m}\cdot\frac{K_b\cdot K_x}{s} = \frac{\frac{K_p}{R}}{J_1 s + B_1 + \frac{K_p\cdot K_m}{R}}\cdot\frac{K_b\cdot K_x}{s} =$$

$$= \boxed{\frac{K_p\cdot K_b\cdot K_x/(R\cdot J_1)}{s + \frac{(B_1 + K_p\cdot K_m/R)}{J_1}}\cdot\frac{1}{s}}$$

$$\boxed{\frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{F}{(J_2 s + B_2)}\cdot\frac{1}{s} = \frac{F/J_2}{\left(s + \frac{B_2}{J_2}\right)s}}$$

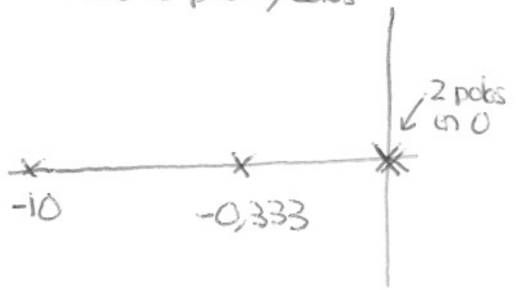
Sustituyendo los valores de las constantes obtenemos las expresiones numéricas.

$$\frac{X(s)}{V_e(s)} = \frac{2\times 2\times 4/(4\times 10{,}5)}{\left(s + \frac{(3 + 2\times 1/4)}{10{,}5}\right)s} = \frac{0{,}381}{(s+0{,}333)\cdot s} \qquad \frac{\theta(s)}{X(s)} = \frac{\frac{100}{50}}{\left(s + \frac{500}{50}\right)\cdot s} = \frac{2}{(s+10)\cdot s}$$

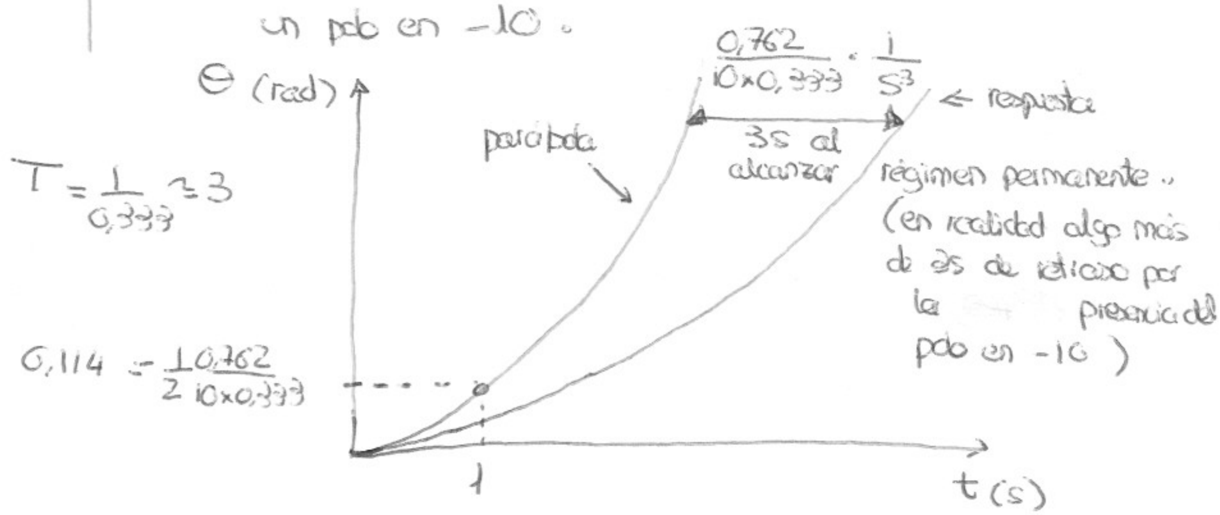
e) $\dfrac{\Theta(s)}{V_e(s)} = \dfrac{0{,}381}{(s+0{,}333)s} \cdot \dfrac{2}{(s+10)\cdot s} = \dfrac{0{,}762}{s^2(s+0{,}333)(s+10)}$

Este sistema tiene dos polos en el origen, por tanto es un sistema inestable.

Plano de polos y ceros



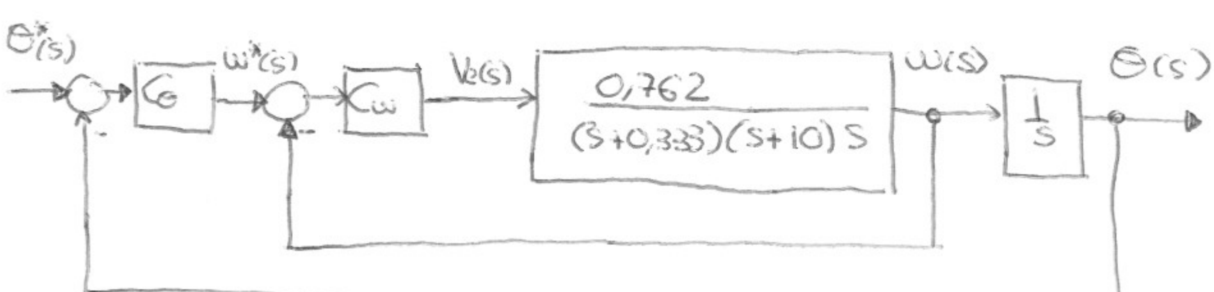
La respuesta será similar a la de un sistema de primer orden con un polo en $-0{,}333$ y entrada parabólica, aunque algo retrasada por la presencia de un polo en -10.



f) A la vista del diagrama de bloques del sistema visto en los apartados b) y c), y dado que se permiten dos sensores para realizar el control, la alternativa más indicada parece un control en cascada.

Si se pretende controlar el sistema con un solo lazo de realimentación la sintonización se antoja difícil, por la presencia de dos polos en el origen.

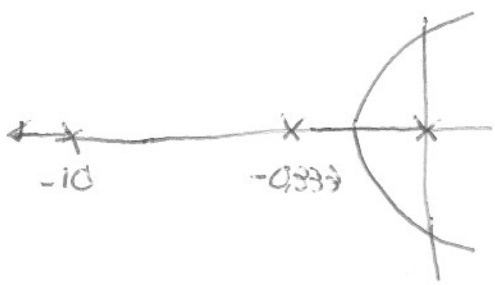
El sistema de control propuesto incluye dos lazos de control uno para controlar la velocidad de giro del submarino y otro para controlar su inclinación. El diagrama de bloques del sistema propuesto queda configurado de la siguiente manera:



C_θ es el controlador de inclinación y C_ω el controlador de velocidad de giro. Entre C_ω y el sistema se incluiría un actuador, que por considerarse ideal, no se muestra en este diagrama de bloques.

g) La especificación más importante es el mantenimiento exacto de la posición al valor indicado, lo cual es fácil de obtener por la propia naturaleza del sistema a controlar. Debe evitarse la sobreoscilación, pues el sistema admite ligeros cambios de inclinación alrededor de la posición de equilibrio, pero una variación grande podría dar lugar a posiciones muy alejadas del diseño inicial, pudiendo llevar el sistema controlado a la inestabilidad.
El tiempo de establecimiento no es decisivo, se buscará que sea el menor posible dentro del cumplimiento de las otras condiciones.

h) Sintonización del lazo de velocidad:



Con un regulador proporcional conseguiremos $e_p = 0$, pues el sistema es de tipo I.

Calcularemos una ganancia que nos lleve al sistema hasta el punto de dispersión, para obtener una respuesta lo más rápida posible sin sobreoscilación.

Pto de dispersión:

$$\boxed{\frac{dk}{ds} = 0} \qquad 1 + \frac{k \cdot 0{,}762}{(s+0{,}333)(s+10)s} = 0$$

$$k = -\frac{(s+0{,}333)(s+10)s}{0{,}762}$$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{1}{0{,}762}\left[(s+10)s + (s+0{,}333)s + (s+0{,}333)\times(s+10)\right]$$

$$s^2 + 10s + s^2 + 0{,}333s + s^2 + 0{,}333s + 10s + 3{,}33 = 0$$

$$3s^2 + 20{,}666s + 3{,}33 = 0$$

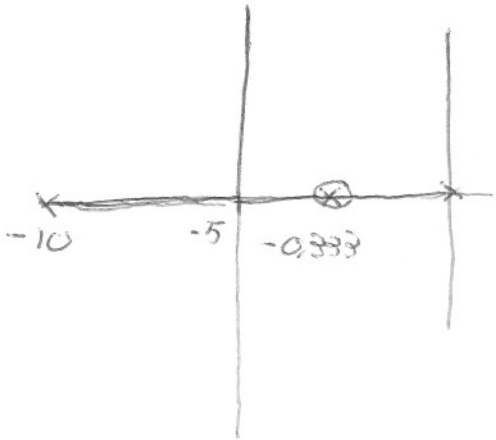
$$s \begin{cases} -6{,}\cancel{7}3 \\ -0{,}165 \; ✓ \end{cases}$$

$$k_{LR} = (10-0{,}165)(0{,}333-0{,}165)(0{,}165) = 0{,}273$$

$$k_\omega \cdot 0{,}762 = 0{,}273 \longrightarrow \boxed{k_\omega = 0{,}358}$$

Este regulador nos dará una respuesta sobreamortiguada y con $e_p = 0$, pero con un $t_s > \frac{\pi}{0{,}165} \approx 19\,s$, es decir, bastante lenta.

Podría hacerse más rápida utilizando la acción diferencial. Por simplicidad se hará el ejemplo con un PD ideal, aunque su implementación real exigiría añadir un polo.



Si cancelamos con el 0 el polo en $-0{,}333$ nos queda un lugar de las raíces como el indicado.

Calculando la ganancia que nos lleva el polo en cadena cerrada que parte del origen hasta el punto de dispersión tenemos:

$$K_{LR} = 5 \cdot 5 = 25$$

$$K_\omega \cdot 0{,}762 = 25 \longrightarrow \boxed{K_\omega = 32{,}8}$$

$$C_\omega(s) = 32{,}8\,(s + 0{,}333)$$

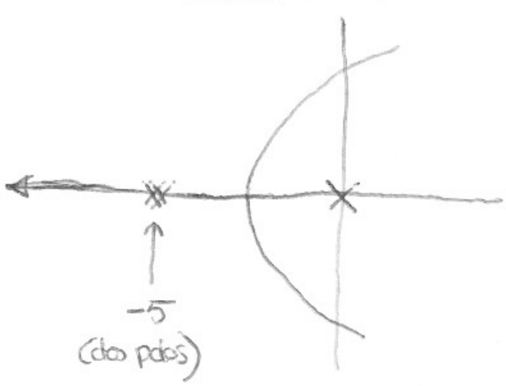
Con este regulador tendríamos una respuesta sin sobreoscilación y $t_s > \frac{\pi}{5} \approx 0{,}62\,s$

Mucho más rápido que el anterior.

Sintonización del lazo de posición:

En este caso podemos tener dos situaciones; si partimos del regulador proporcional del lazo de velocidad, debemos tener en cuenta la dinámica (polos) de este sistema, pues son muy lentos, y no lo podemos considerar ideal. Si partimos del regulador diferencial sí podríamos hacer esta simplificación, de todas formas conseguiríamos una mejor dinámica teniéndolo en cuenta. Lo haremos pues, de esta última forma.

Partimos de un sistema como el mostrado en el diagrama de polos y ceros:



El sistema es $\frac{25}{(s+5)^2} \cdot \frac{1}{s}$

Calcularemos la máxima ganancia que nos da el menor t_s sin sobreoscilación.

Pto. de dispersión

$$\frac{dk}{ds} = 0 \qquad k = -\frac{(s+5)^2 \cdot s}{25} \qquad \frac{dk}{ds} = -\frac{1}{25}\left[2(s+5)s + (s+5)^2\right]$$

$$2s^2 + 10s + s^2 + 10s + 25 = 0$$

$$3s^2 + 20s + 25 = 0 \longrightarrow s \begin{cases} \cancel{-5} \\ -1{,}667 \checkmark \end{cases}$$

$$K_{LR} = (5-1{,}667)^2\, 1{,}667 = 18{,}51$$

$$K_\theta \cdot 25 = 18{,}51$$

$$\boxed{K_\theta = 0{,}74}$$

El tiempo de establecimiento esperado de este sistema es de $t_s > \frac{\pi}{1{,}667} = 1{,}88\,s$

i) Si al submarino le diéramos una consigna de 4 radianes le estaríamos mandando girar más de 180°, por tanto el submarino se hundiría pues llegaría un momento en que pasaría por posición vertical. En general con consignas muy alejadas del pto. de equilibrio se hace difícil predecir el comportamiento del sistema.