

Diseño de Redes de Adelanto y Atraso de fase Sistemas Automáticos

17 de mayo de 2004

Índice General

1	Enunciado	2
2	Primer juego de especificaciones	3
2.1	Especificaciones	3
2.2	Lugar de las raíces	3
2.3	Verificación de las características dinámicas (M_p)	3
2.4	Verificación del régimen permanente: red de atraso de fase	6
3	Segundo juego de especificaciones	10
3.1	Especificaciones	10
3.2	Lugar de las raíces	10
3.3	Verificación de las características dinámicas (M_p, t_s): diseño de una red de adelanto (acción PD pura)	11
3.4	Alternativas: red de adelanto realizable	13
3.5	Situación en frecuencia	14
4	Aspectos prácticos	15
4.1	Efecto de la dinámica del sensor	15
4.2	Ancho de banda objetivo y acción de control	17

1 Enunciado

Un proceso industrial dado tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{3(s + 6.2)}{(s + 1)(s + 2.5)(s + 7)}$$

Se desea diseñar un sistema de control con realimentación unitaria para cumplir

$$\begin{aligned} e_{rpp} &\leq 4\% \\ M_p &\leq 5\% \end{aligned}$$

Repetir el diseño para cumplir

$$\begin{aligned} t_s &\leq 1.25\text{seg} \\ M_p &\leq 5\% \end{aligned}$$

2 Primer juego de especificaciones

2.1 Especificaciones

Se pide una sobreoscilación menor del 5%

$$M_p = 0.05 = e^{-\pi \cot \theta} \rightarrow \theta = 46.36^\circ$$

2.2 Lugar de las raíces

LR sobre el eje real. Dejando un número impar de singularidades a la derecha, comprobamos que pertenecen al LR los tramos $[-2.5, -1]$ y $[-7, -6.2]$

Asíntotas: Dado que hay 3 polos y 1 cero, dos de las tres ramas que tiene el lugar, tenderán a dos asíntotas situadas a $\pm 90^\circ$ respecto al eje real.

Centroide:

$$\sigma_c = \frac{-1 - 2.5 - 7 + 6.2}{3 - 1} = 2.15$$

Trazando el lugar de las raíces vemos que con un regulador proporcional es posible cumplir la especificación de M_p utilizando un regulador proporcional. Solo hace falta hallar la ganancia de dicho regulador.

2.3 Verificación de las características dinámicas (M_p)

El polo deseado p_d se encuentra sobre la recta de ángulo θ y a la vez debe pertenecer al LR, por lo que debe verificar el criterio del argumento: Suponemos $\sigma_{raiz} = -2.1$

$$s_{raiz} = -2.1 - 2.1 \tan 46.36^\circ = -2.1 + 2.2j$$

$$\begin{aligned} s_{-1} &= 2.46|116.57^\circ \\ s_{-2.5} &= 2.24|79.76^\circ \\ s_{-7} &= 5.37|24.18^\circ \\ s_{-6.2} &= 4.65|28.22^\circ \end{aligned}$$

Haciendo balance de ángulos

$$\sum \theta_{p_i} - \sum \theta_{c_i} = 116.57^\circ + 79.76^\circ + 24.18^\circ - 28.22^\circ = 192.33^\circ > 180^\circ$$

La raíz tiene que estar más abajo de la recta. σ_{raiz} tiene que ser más pequeña. Suponemos $\sigma_{raiz} = -1.9$

$$s_{raiz} = -1.9 - 1.9 \tan 46.36^\circ = -1.9 + 2j$$

$$\begin{aligned} s_{-1} &= 2.19|114.23^\circ \\ s_{-2.5} &= 2.09|73.30^\circ \\ s_{-7} &= 5.48|21.41^\circ \\ s_{-6.2} &= 4.74|24.94^\circ \end{aligned}$$

Haciendo balance de ángulos

$$\sum \theta_{p_i} - \sum \theta_{c_i} = 114.23^\circ + 73.3^\circ + 21.41^\circ - 24.94^\circ = 184^\circ > 180^\circ$$

Sigue siendo muy grande. El cruce está aún más abajo. Suponemos $\sigma_{raiz} = -1.8$

$$s_{raiz} = -1.8 - 1.8 \tan 46.36^\circ = -1.8 + 1.89j$$

$$\begin{aligned} s_{-1} &= 2.05|112.94^\circ \\ s_{-2.5} &= 2.02|69.68^\circ \\ s_{-7} &= 5.53|19.97^\circ \\ s_{-6.2} &= 4.79|23.25^\circ \end{aligned}$$

Haciendo balance de ángulos

$$\sum \theta_{p_i} - \sum \theta_{c_i} = 112.94^\circ + 69.68^\circ + 19.97^\circ - 23.25^\circ = 179.34^\circ \approx 180^\circ$$

Lo tomamos como bueno. La ubicación deseada para los polos dominantes es,

$$s_d = -1.8 \pm 1.89j$$

Ecuación característica

$$K \frac{N(s)}{D(s)} = -1$$

$$K_{reg} \cdot 3 \cdot \frac{s + 6.2}{(s + 1)(s + 2.5)(s + 7)} = -1$$

de donde,

$$K_{LR} = \frac{d_{-1}d_{-2.5}d_{-7}}{d_{6.2}} = \frac{2.05 \times 2.02 \times 5.53}{4.79} = 4.78$$

$$R(s) = K_{reg} = K_{LR}/3 = 1.59$$

Con este regulador las raíces dominantes se sitúan en

$$s_d = -1.8 \pm 1.89j$$

La tercera raíz podría obtenerse por división:

$$(s + 1)(s + 2.5)(s + 7) + 4.78(s + 6.2) = 0$$

dividiendo polinomios

$$\frac{s^3 + 10.5s^2 + 31.78s + 47.14}{s^2 + 3.6s + 6.81} \approx s + 6.9$$

lo que significa que la tercera raíz del sistema realimentado está aproximadamente en $s = -6.9$

2.4 Verificación del régimen permanente: red de atraso de fase

Ahora debemos verificar si el regulador elegido $R(s) = 1.59$ verifica el régimen permanente:

$$e_{rpp} \leq 0.04 = \frac{1}{1 + K_p^*} \rightarrow K_p^* = 1/0.04 - 1 = 24$$

La constante de error actual es

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} K_{reg} G(s) = 1.59 \frac{3(s + 6.2)}{(s + 1)(s + 2.5)(s + 7)} = 1.69 \ll 24 \rightarrow \text{¡insuficiente!}$$

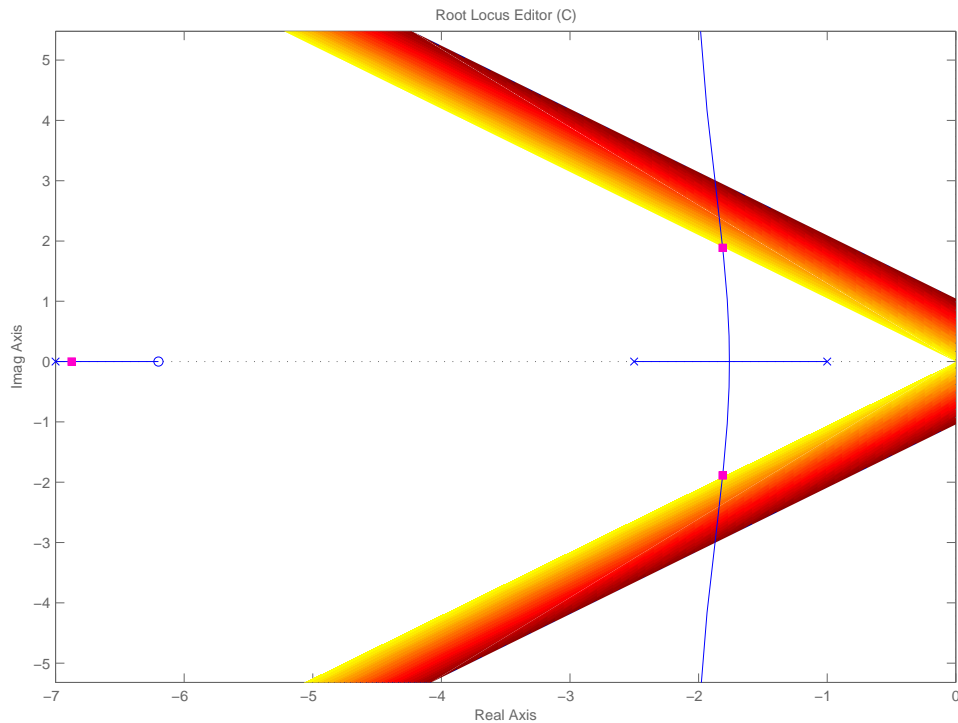


Figura 1: Lugar de las raíces con $R(s) = 1.59$

Debemos incrementar la ganancia estática del regulador pasando de $K_p = 1.69$ a $K_p^* = 24$. Necesitamos incrementar la ganancia estática en cadena abierta en un factor

$$24/1.69 \approx 14.20$$

Para ello añadiremos a nuestro regulador una red de retardo de fase del tipo

$$\frac{s+c}{s+p}, \text{ tal que } c > p$$

de manera que su ganancia estática sea $c/p \geq 14.20$ y tanto c como p sean pequeños (para que estén próximos). Con este tipo de red, se consigue incrementar la ganancia estática a bajas frecuencias, sin modificar lo que sucede a altas frecuencias.

Desde el punto de vista del LR, si c y p son próximos, no modificarán demasiado el resto del LR, aunque aparecerá un modo transitorio próximo al cero que puede originar dinámicas lentas. Veamos dos posibles elecciones.

Si tomamos $p = 0.02$, queda

$$c = 0.02 \times 14.20 = 0.28$$

con ello, los ángulos respectivos hacia s_d son

$$\theta_p = 128.81^\circ, \quad \theta_c = 133.28^\circ \rightarrow \theta_p - \theta_c = 5^\circ$$

Si elegimos $p = 0.01$, queda

$$c = 0.01 \times 14.20 = 0.142$$

con ello, los vectores respectivos hacia s_d son

$$s - p = 2.51|131.26^\circ$$

$$s - c = 2.60|133.44^\circ$$

La diferencia de ángulos es 2° y la modificación en la ganancia del LR que introducen es $2.51/2.60 = 0.97$, muy próxima a 1 y por tanto casi despreciable. Este afecta menos al resto del LR que el anterior, aunque el modo transitorio resultante de la rama que va de c a p es más lento. Habría que simular para ver cuál es más ventajoso.

Si elegimos éste último se tiene

$$R(s) = 1.59 \times \frac{s + 0.142}{s + 0.01}$$

El LR se describe a continuación

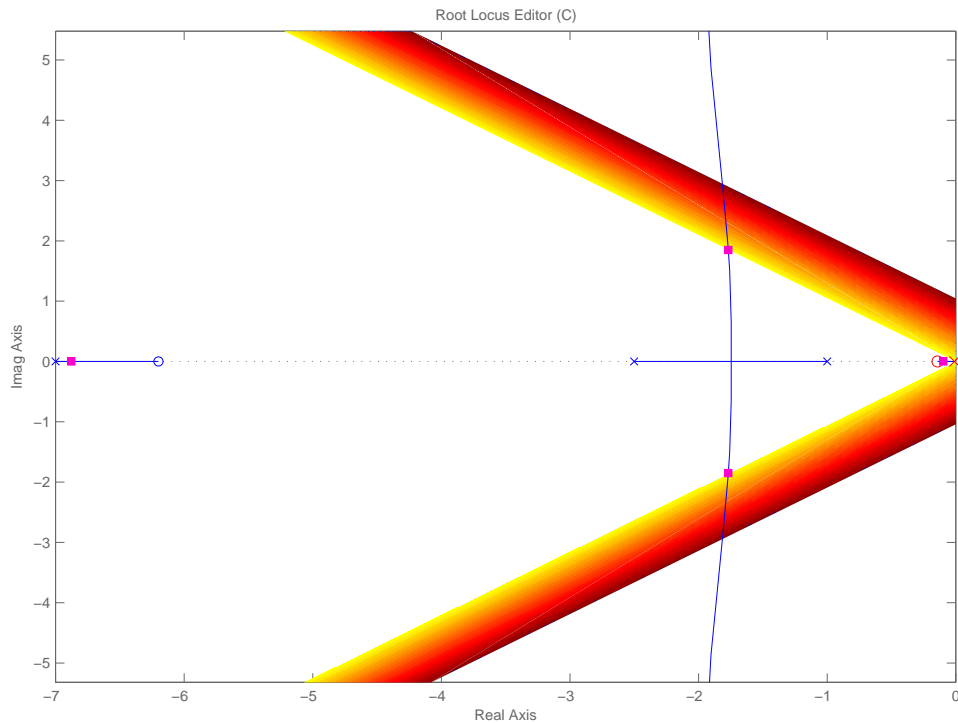


Figura 2: Lugar de las raíces con $R(s) = 1.59 \times \frac{s+0.142}{s+0.01}$

La situación en frecuencia se muestra en la figura adjunta. En ella puede comprobarse cómo el efecto del regulador es el de incrementar

la ganancia del sistema a bajas frecuencias sin modificar la dinámica principal, que tiene lugar en torno a la frecuencia de cruce de ganancia (en la figura, $\omega_{cg} \approx 1 \text{ rad/s}$)

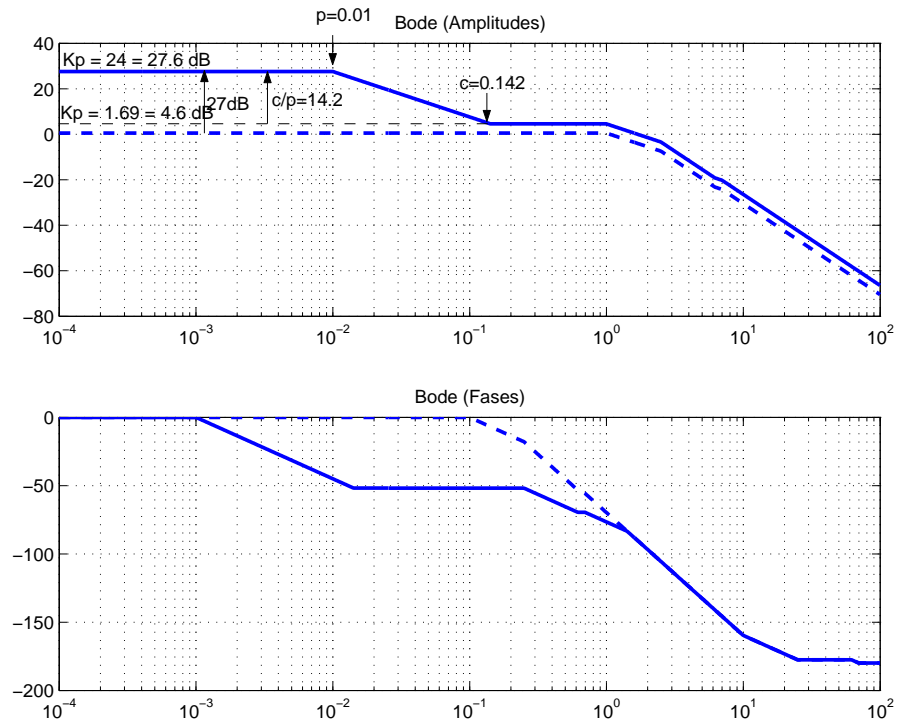


Figura 3: Diagrama de bode del sistema original y del sistema compensado con $R(s) = 1.59 \times \frac{s+0.142}{s+0.01}$

Enunciado:

Un proceso industrial dado tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{3(s + 6.2)}{(s + 1)(s + 2.5)(s + 7)}$$

Se desea ahora diseñar un sistema de control con realimentación unitaria para cumplir

$$\begin{aligned} t_s &\leq 1.25\text{seg} \\ M_p &\leq 5\% \end{aligned}$$

3 Segundo juego de especificaciones

3.1 Especificaciones

Objetivos:

$$t_s \leq 1.25 \rightarrow t_s = \pi/\sigma \rightarrow \sigma \leq \pi/1.25 = 2.51$$

$$M_p \leq 5\% \rightarrow \theta \leq 46.36^\circ$$

3.2 Lugar de las raíces

La situación en el lugar de las raíces es la que se muestra en la figura adjunta

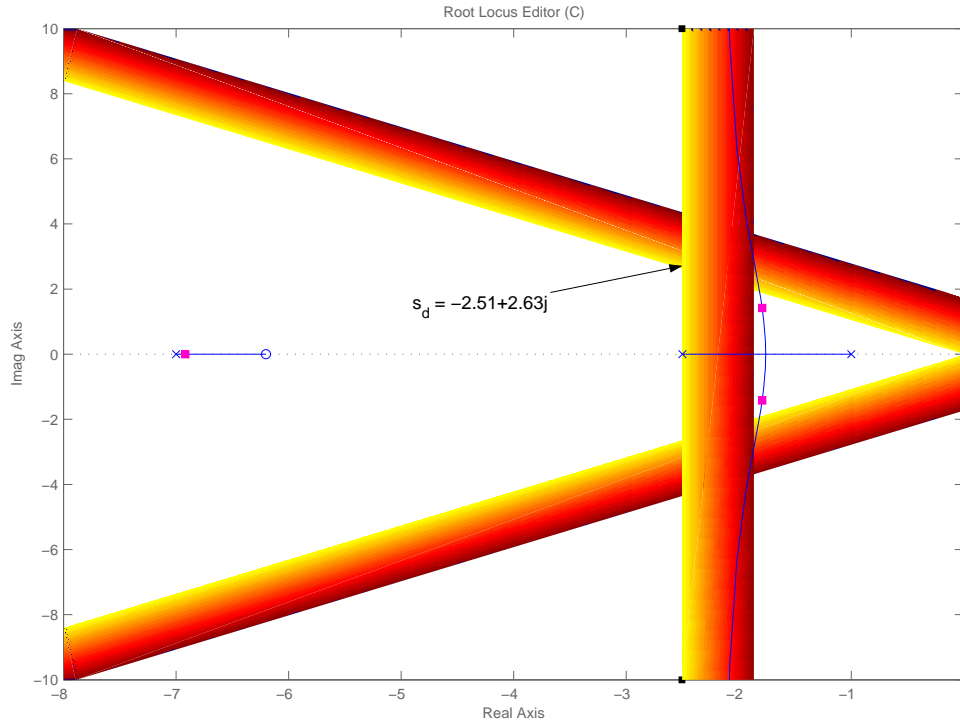


Figura 4: Lugar de las raíces del sistema junto con las restricciones $t_s \leq 1.25$ seg, $M_p \leq 5\%$

La posición deseada de los polos dominantes es

$$s_d = -2.51 \pm 2.51 \tan 46.36^\circ = -2.51 \pm 2.63j$$

3.3 Verificación de las características dinámicas (M_p, t_s): diseño de una red de adelanto (acción PD pura)

Vemos que el lugar de las raíces no pasa por dicha posición. Habrá que calcular la demanda de ángulo necesaria.

$$\begin{aligned} s_{-1} &= 3.03|119.86^\circ \\ s_{-2.5} &= 2.63|90.22^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}s_{-7} &= 5.20|30.36^\circ \\ s_{-6.2} &= 4.53|35.48^\circ\end{aligned}$$

El balance de ángulos es

$$119.86^\circ + 90.22^\circ + 30.36^\circ - 35.48^\circ = 204.96^\circ, \quad 204.96^\circ - 180^\circ = 24.96^\circ$$

Por tanto, necesitamos 24.96° para que el LR “pase” por s_d .

Si elegimos una compensación con un cero ideal,

$$R(s) = K \cdot (s + c)$$

requeriremos que el vector que va del cero al punto s_d tenga un ángulo de 24.96° con el eje real.

$$\frac{2.63}{\tan 24.96^\circ} = 5.65 \rightarrow c = -2.51 - 5.25 = -8.16$$

Para hallar la K aplicamos el criterio del módulo

$$\begin{aligned}s_{-1} &= 3.03|119.86^\circ \\ s_{-2.5} &= 2.63|90.22^\circ \\ s_{-7} &= 5.20|30.36^\circ \\ s_{-6.2} &= 4.53|35.48^\circ \\ s_c &= 6.23|24.96^\circ\end{aligned}$$

$$K_{LR} = \frac{d_{-1}d_{-2.5}d_{-7}}{d_{6.2}d_c} = 1.46$$

$$K_{LR} = K \cdot 3 \rightarrow K = 0.49$$

Por tanto,

$$R(s) = 0.49(s + 8.16)$$

La situación con este regulador se muestra en la figura adjunta

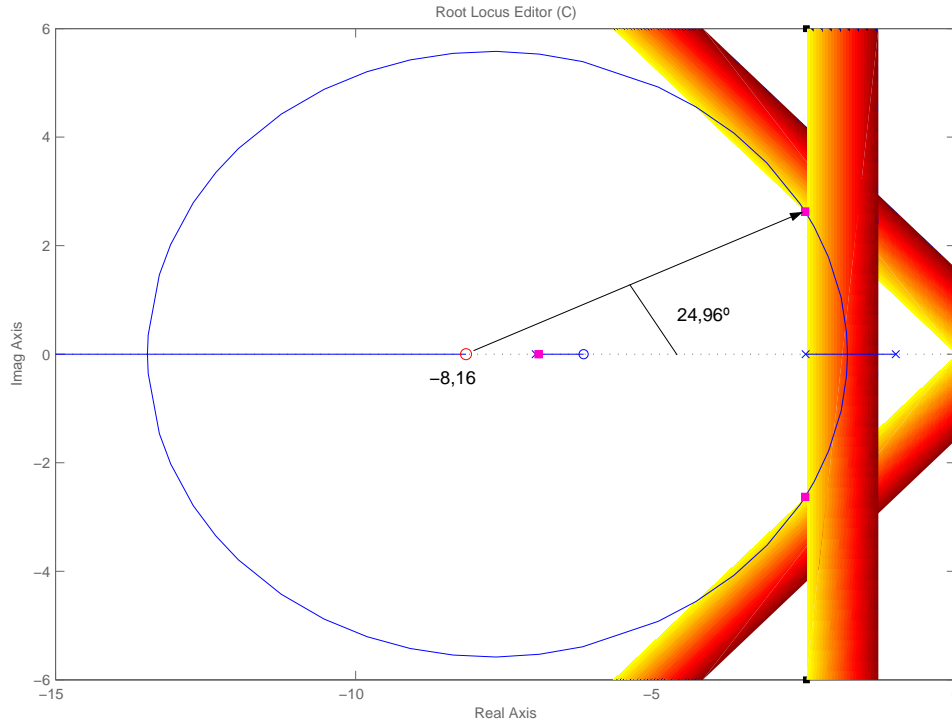


Figura 5: Lugar de las raíces con $R(s) = 0.49(s + 8.16)$

3.4 Alternativas: red de adelanto realizable

Siguiendo un procedimiento similar, otra opción es situar un par polo cero. Para ello, se puede elegir primero la posición del cero, y calcular la posición del polo de forma que el ángulo entre ambos sea de 24.96° . Si elegimos como posición del cero $c = 7$, p debe estar en una posición formando un ángulo de 24.96° . Hallando la K correspondiente mediante el criterio del argumento queda

$$R(s) = K \frac{s + c}{s + p} = 16.46 \frac{s + 7}{s + 30.46}$$

Este regulador es realizable y su acción de control es más moderada. Este proceder da lugar a toda una familia de reguladores según elijamos la posición del cero. Cuanto más alejado elijamos el cero, más próximo

será el comportamiento al cero ideal (cuando $c = 8.16, p = \infty$). En general, la versión real (valores bajos de c) tiene como ventajas (+) y desventajas (-):

- + Menor acción de control.
- + Menor sensibilidad a ruidos.
- Más influencia del cero en la dinámica del sistema en bucle cerrado, y por tanto un comportamiento más oscilatorio y peores características dinámicas (principalmente, sobreoscilación)

3.5 Situación en frecuencia

La comparación en frecuencia de ambos reguladores se ve en la figura:

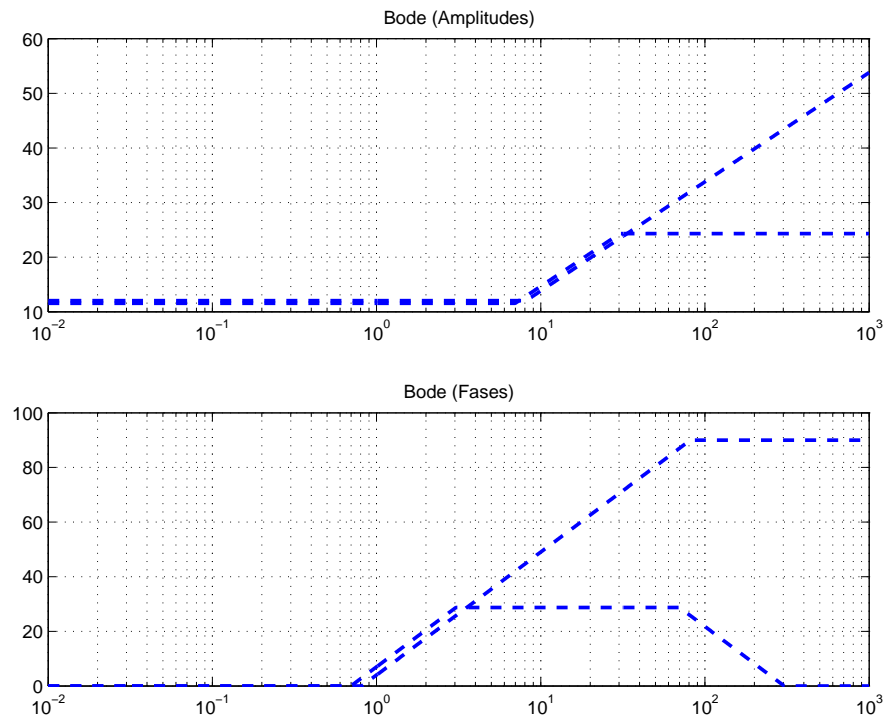


Figura 6: Diagramas de Bode de los dos tipos de compensadores: el ideal, $R(s) = 0.49(s + 8.16)$, y el realizable, $R(s) = 16.46 \frac{s+7}{s+30.46}$

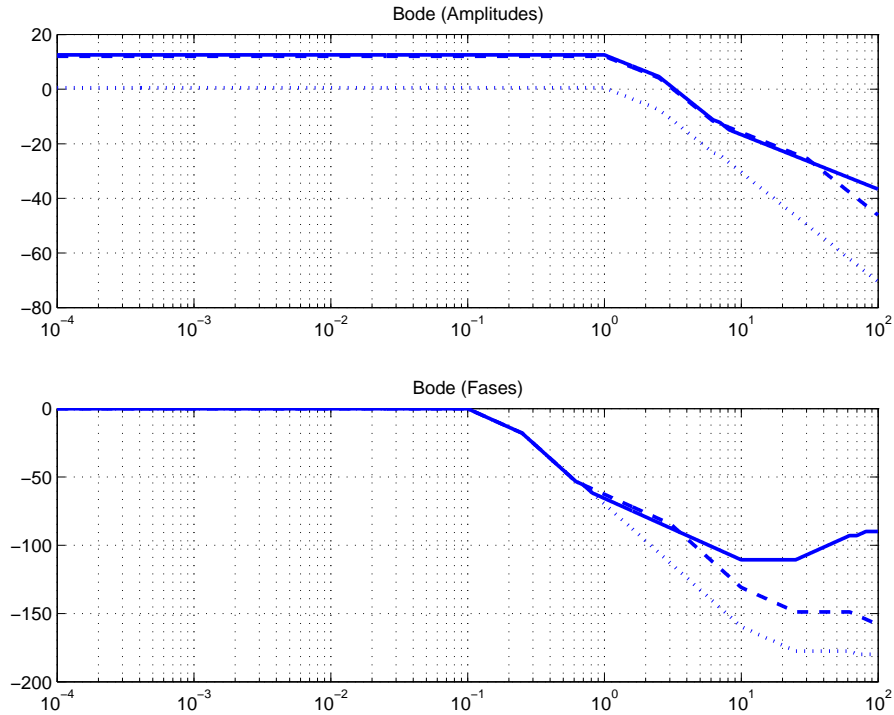


Figura 7: Diagramas de Bode de la función de bucle abierto para los dos tipos de compensadores

4 Aspectos prácticos

4.1 Efecto de la dinámica del sensor

El diseño realizado se basa en un sensor de ganancia unitaria y con dinámica instantánea. En el momento de la implementación, el sensor será un elemento real, cuyas características dependerán del coste. Típicamente, un sensor tendrá una dinámica no instantánea que, si se elige mal, afecta al comportamiento del bucle.

En la figura adjunta se muestran las funciones de sensibilidad del diseño del último apartado (red de adelanto de fase), para un sensor ideal $H(s) = 1$ y para un sensor real $H(s) = \frac{1}{s+1}$, cuyo ancho de banda 1 rad/s es demasiado

pequeño e interfiere en la dinámica del sistema (cuyo ancho de banda, ω_{cg} es de unos 3 rads/s).

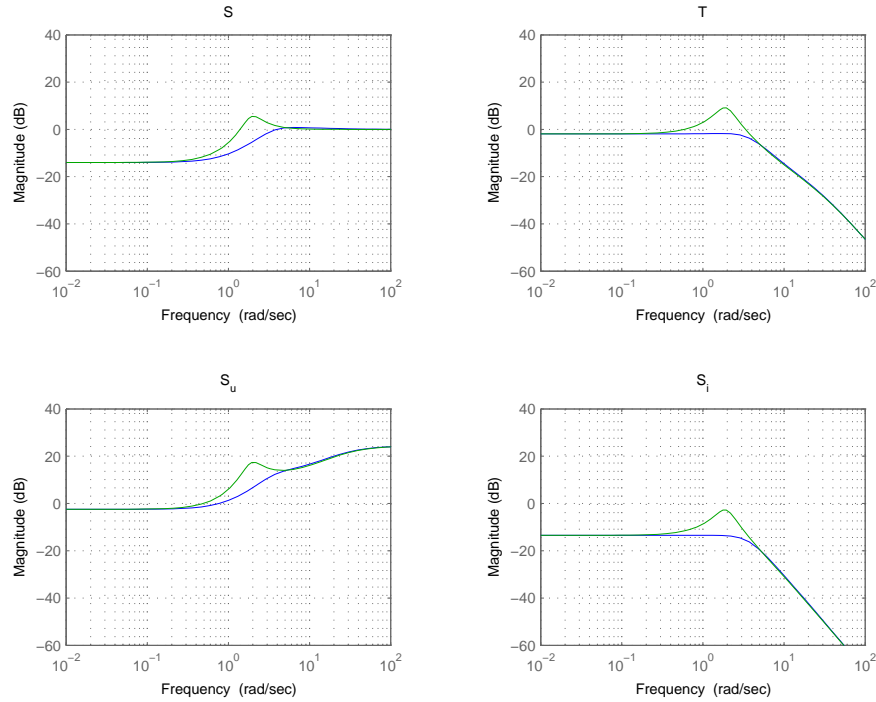


Figura 8: Funciones de sensibilidad para un sensor ideal $H(s) = 1$ y para un sensor real $H(s) = \frac{1}{s+1}$.

De estas figuras se desprenden las siguientes conclusiones:

- La presencia del sensor origina un retraso de fase que merma el MF. Esto incrementa los valores máximos (aparece resonancia) en las funciones de sensibilidad, ya que la función

$$1 + L(j\omega)$$

que figura en el denominador de las funciones de sensibilidad adquiere un valor pequeño en torno a la frecuencia de cruce de ganancia, ω_{cg} en la que $|L(j\omega_{cg})| = 1$ y $\arg\{L(j\omega_{cg})\} \approx -180^\circ$.

- Se aprecia en general un decremento en el ancho de banda de las funciones de sensibilidad. Particularmente, la función de sensibilidad S adquiere valores elevados y a más bajas frecuencias, lo que implica inestabilidad, tendencia a oscilar y vulnerabilidad ante perturbaciones, especialmente en torno a unos 2 rads/s.
- Observando la función de sensibilidad de control, S_u se aprecia un incremento de la acción de control en torno a 2 rads/s lo que puede originar deterioro del proceso, ineficiencia energética (se utiliza más energía para controlar el sistema) o saturación de la acción de control, entre otras cosas.
- La función de sensibilidad complementaria, T , exhibe también un valor máximo mayor (en torno a 2 rads/s), lo que implica una mayor sensibilidad a errores de modelado. Errores de modelado, variaciones en el comportamiento de la planta, etc, a frecuencias en torno a 2 rads/s pueden hacer fácilmente que el sistema se vuelva inestable.

4.2 Ancho de banda objetivo y acción de control

Otro aspecto a tener en cuenta, son los objetivos del control. Uno de los aspectos que conviene tener en cuenta es el compromiso entre el ancho de banda del sistema realimentado y la acción de control. Como se sabe

$$T = \frac{CG}{1 + CG}, \quad S_u = \frac{C}{1 + CG}$$

es decir,

$$S_u(j\omega) = T(j\omega)/G(j\omega)$$

Esto significa, que todo incremento en el ancho de banda del sistema logrado por realimentación, supone una acción de control tanto mayor cuanto más ganancia se haya aportado al proceso, G , para conseguir la respuesta dada por T .

Desde el punto de vista del Lugar de las Raíces, no conviene situar el objetivo muy lejos del Lugar. Cuando el punto objetivo se establece muy lejos del Lugar, ello significa un incremento en el ancho de banda (ya que los modos dominantes se sitúan habitualmente más lejos del origen) lo que supone por lo anterior acciones de control mayores.

Así, por tanto, si en el contexto del problema de control la acción de control es crítica, conviene moderar los requisitos de rapidez exigidos al sistema de control.