

Diseño mediante Redes de Adelanto y Atraso de Fase

Sistemas Automáticos

20 de mayo de 2004

Enunciado:

Un proceso industrial dado tiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{20}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

Se desea diseñar un sistema de control con realimentación unitaria para cumplir

$$\begin{aligned} e_{rpp} &\leq 10\% \\ \text{MF} &\geq 40^\circ \end{aligned}$$

Red de adelanto de fase

Especificaciones en régimen permanente

El error en régimen permanente tiene que ser menor del 10%, por tanto,

$$e_{rpp} \leq 10\% \rightarrow \frac{1}{1 + K_p} \leq 0.1 \rightarrow K_p \geq 9 \rightarrow K_{reg} \geq 4.5$$

es decir, dado que la ganancia estática $G(0)$ del sistema es 2, debemos multiplicar la ganancia actual en un factor $K_{reg} = 4.5$ para poder tener una ganancia en bucle abierto en continua de 9.

Margen de fase:

Aumentar la ganancia, aunque suele hacer al sistema más rápido (incremento en el ancho de banda) habitualmente trae aparejado un deterioro en la dinámica (disminución del MF). En efecto, si dibujamos la curva de $K_{reg}G(s)$, vemos que el margen de fase es muy escaso (unos 7°).

Hasta 40° aún faltan 33° . Como debemos añadir un margen de seguridad de 5° a 12° aproximadamente, podemos redondear el aporte requerido a 40° (margen de seguridad 7°). Para tener un aporte de 40° se requiere

$$\alpha = \frac{1 - \sin 40^\circ}{1 + \sin 40^\circ} = \frac{1 - 0.6428}{1 + 0.6428} = 0.2174 \rightarrow (\text{redondeando}) \rightarrow \alpha = 0.2$$

El valor de α obtenido corresponde a la relación entre polo y cero

$$\alpha = \frac{c}{p}$$

El regulador final tendrá la forma

$$R(s) = K_{reg} \cdot \left(\frac{p}{c} \cdot \frac{s + c}{s + p} \right)$$

cuya ganancia estática sigue siendo K_{reg} pues el término encerrado entre paréntesis tiene ganancia estática 1. En la figura adjunta se puede ver la anatomía en frecuencia de una red de adelanto del tipo

$$PD(s) = \frac{p}{c} \cdot \frac{s + c}{s + p} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{s + c}{s + p} = \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

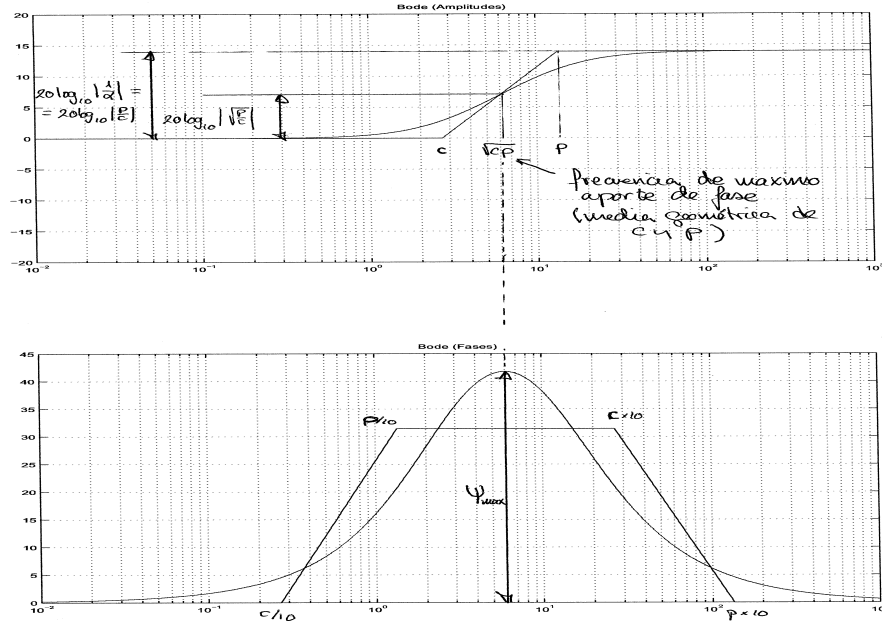


Figura 1: Anatomía en frecuencia de una red de adelanto de fase.

Ya tenemos la relación entre p y c , es decir, a cuanto distancia deben estar polo y cero para aportar 40° . Falta determinar la posición.

La máxima aportación de fase ψ_{max} se produce a la frecuencia correspondiente a la media geométrica de p y c

$$\omega_{\psi_{max}} = \sqrt{p \cdot c}$$

A dicha frecuencia, el aporte de módulo es

$$20 \log_{10} \left| \sqrt{\frac{p}{c}} \right| = 20 \log_{10} |2.23612| \approx 7\text{dB}$$

Para que el máximo aporte de fase ψ_{max} se produzca exactamente en la nueva frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} deberemos hacer coincidir el punto en el que el $K_{reg}G(s)$ tiene -7dB con la frecuencia de máximo

aporte de fase. Yendo al Bode, puede comprobarse que la frecuencia a la que $K_{reg}G(s)$ tiene ganancia -7dB es

$$\omega_{-7\text{dB}} = 6\text{rads/s}$$

Esta frecuencia define la posición en la que debemos situar la frecuencia media (geométrica) de la red de adelanto. Por tanto

$$p = 6 \cdot 2.2361 = 13.41 \text{ rads/s}$$
$$c = \frac{6}{2.2361} = 2.68 \text{ rads/s}$$

El regulador, por tanto quedará

$$R(s) = 4.5 \cdot 5 \cdot \frac{s + 2.68}{s + 13.41}$$

Comprobación

Trazando mediante el computador el diagrama de Bode real, comprobamos que el margen de fase es de 32.2° , ligeramente inferior al especificado. Esto puede corregirse incrementando, por ejemplo el margen de fase aportado, lo que nos daría un regulador con un α más pequeña, es decir, una acción diferencial más pura.

El ciclo completo requiere iterar sobre el diseño original, visualizando también, mediante simulación las respuestas al escalón, acción de control, etc. hasta conseguir un diseño satisfactorio.

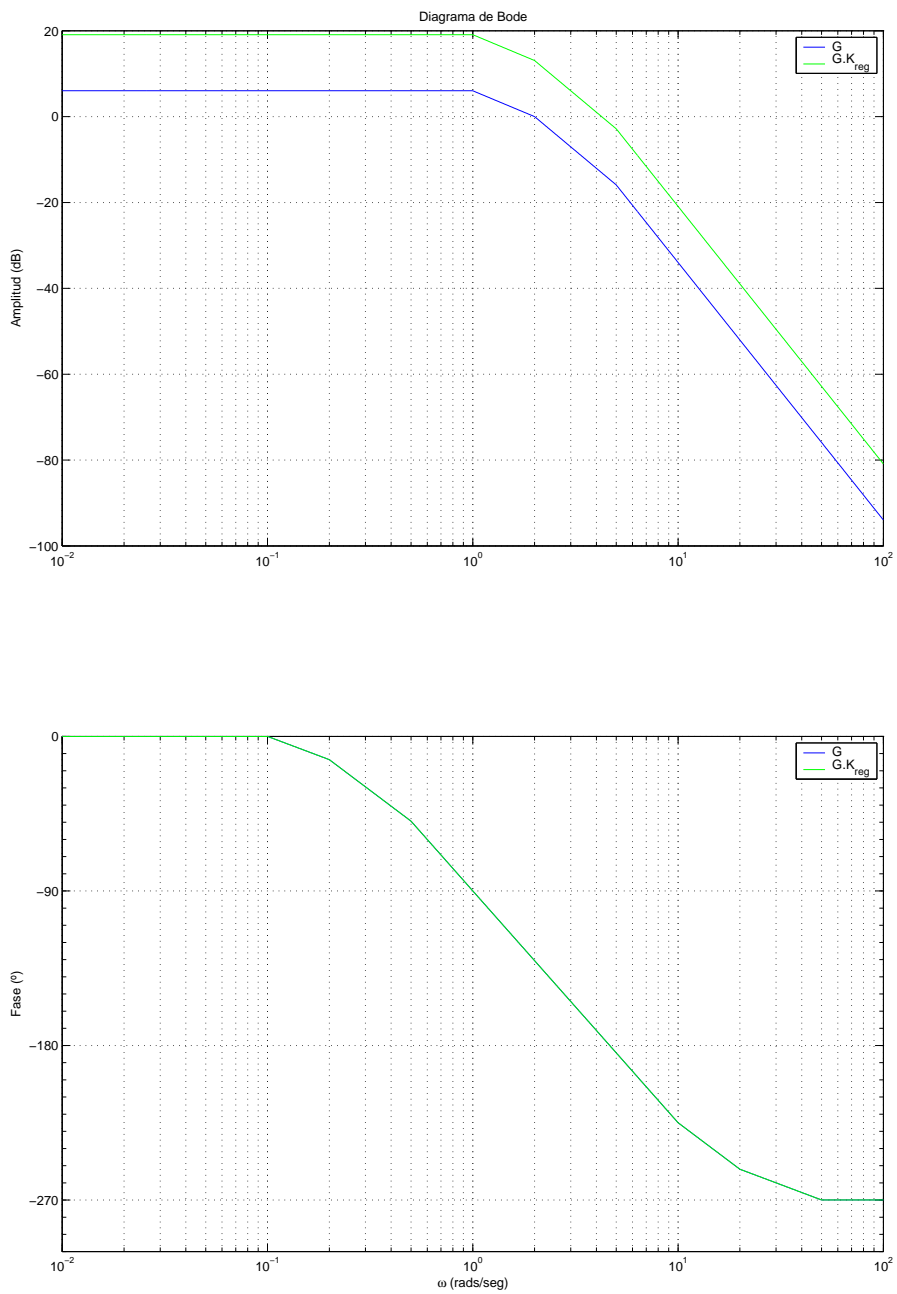


Figura 2: Bode (asintótico) de la función de bucle abierto para el sistema original $G(j\omega)$ y del sistema original con la ganancia requerida, $K_{reg}G(j\omega)$

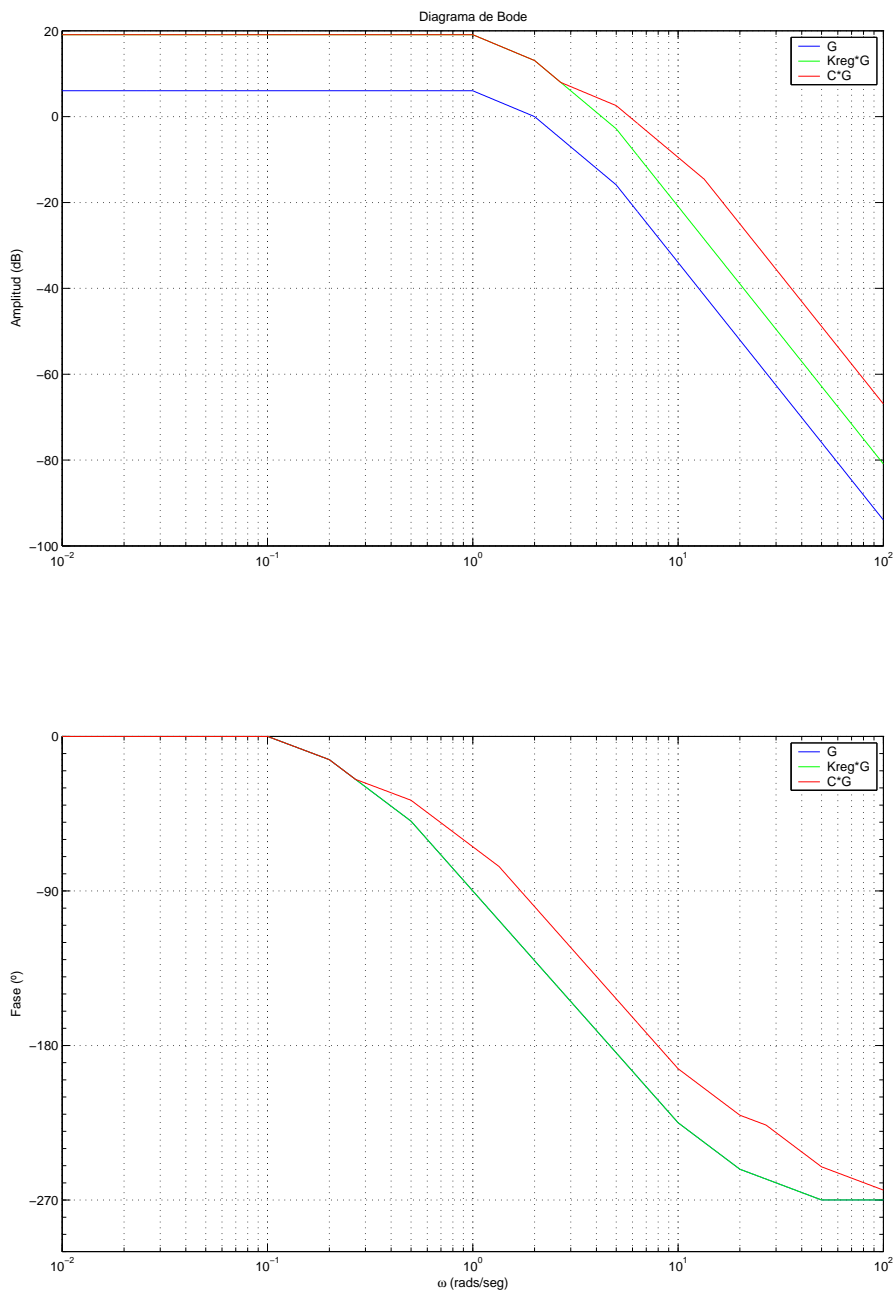


Figura 3: Bode (asintótico) en bucle abierto del sistema original $G(j\omega)$, sistema con ganancia pura $K_{reg}G(j\omega)$, y sistema con la red de adelanto diseñada $K_{reg}G(j\omega)$

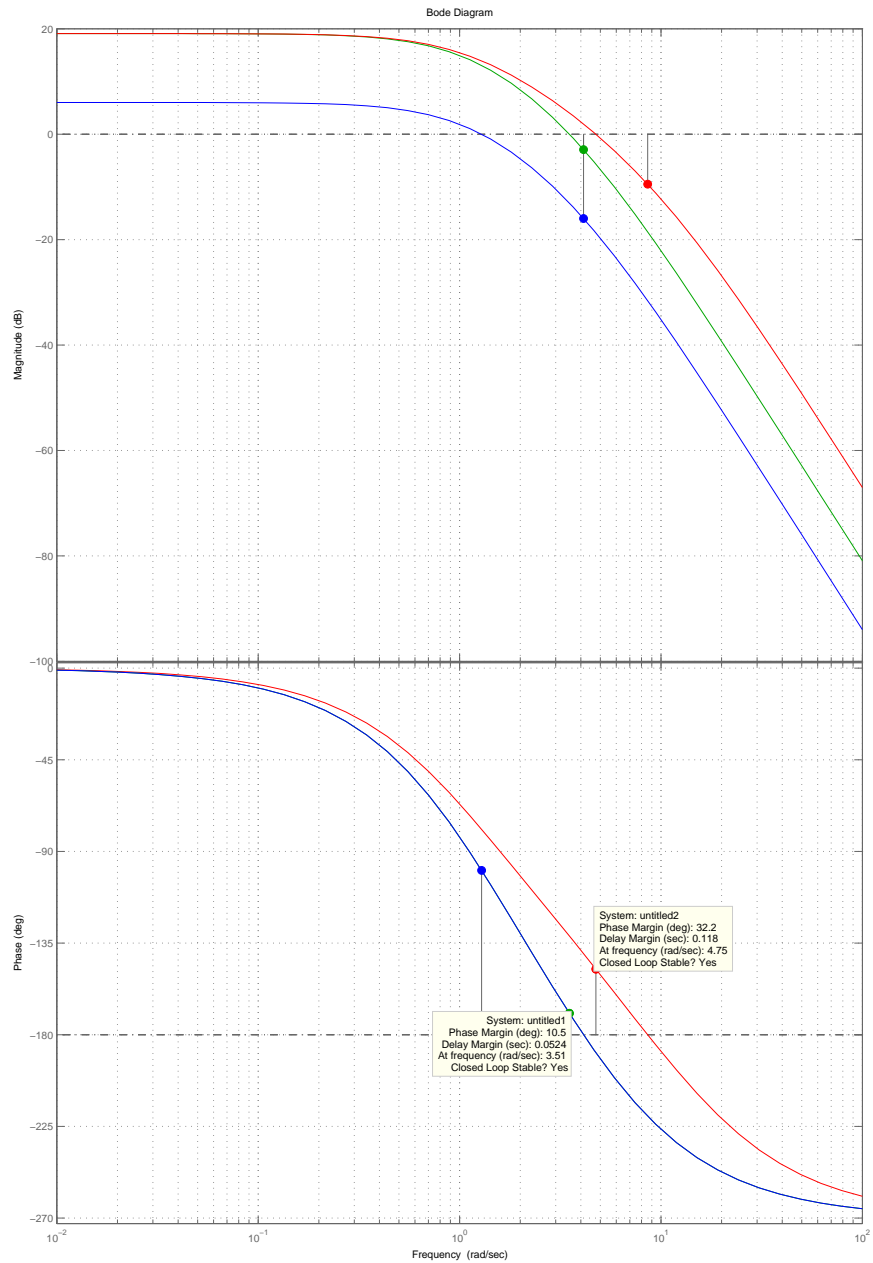


Figura 4: Bode (reales) en bucle abierto del sistema original $G(j\omega)$, sistema con ganancia pura $K_{reg}G(j\omega)$, y sistema con la red de adelanto diseñada $K_{reg}G(j\omega)$

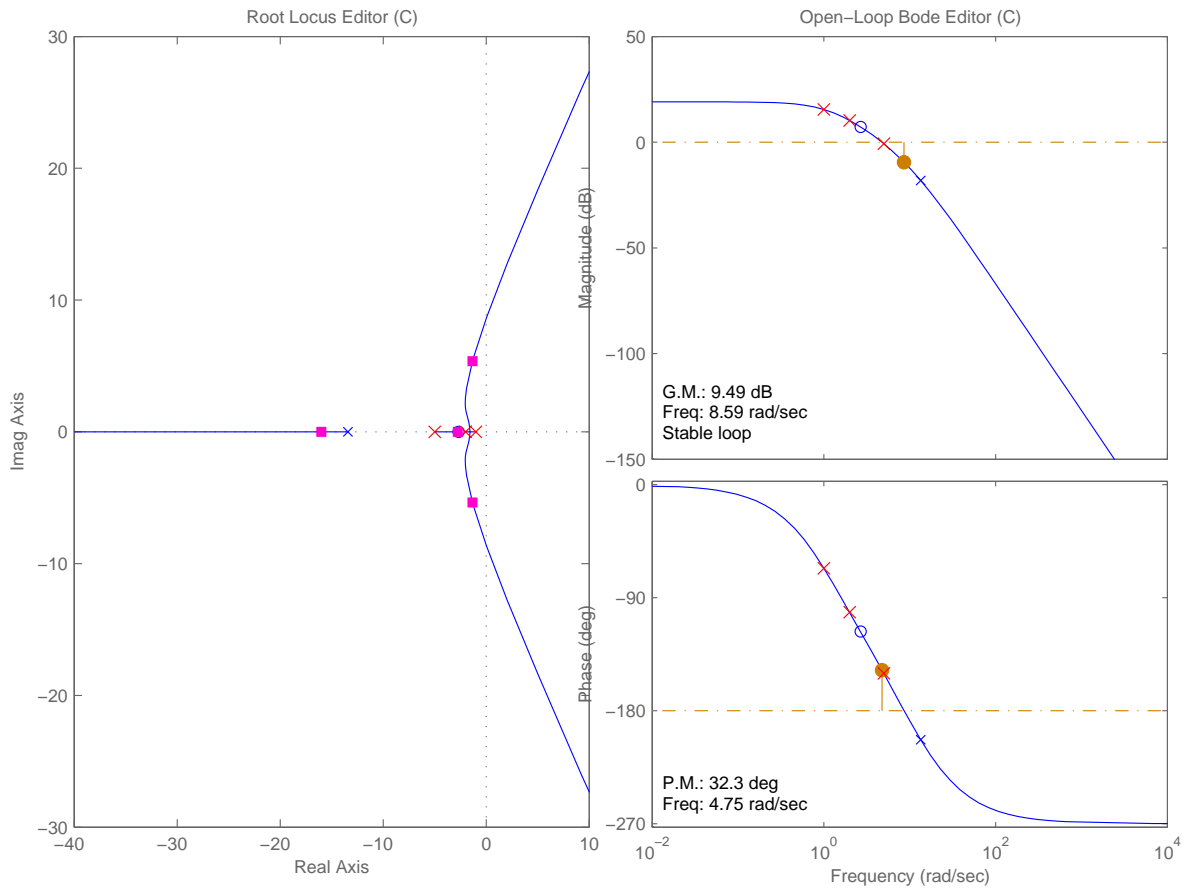


Figura 5: Lugar de las Raíces

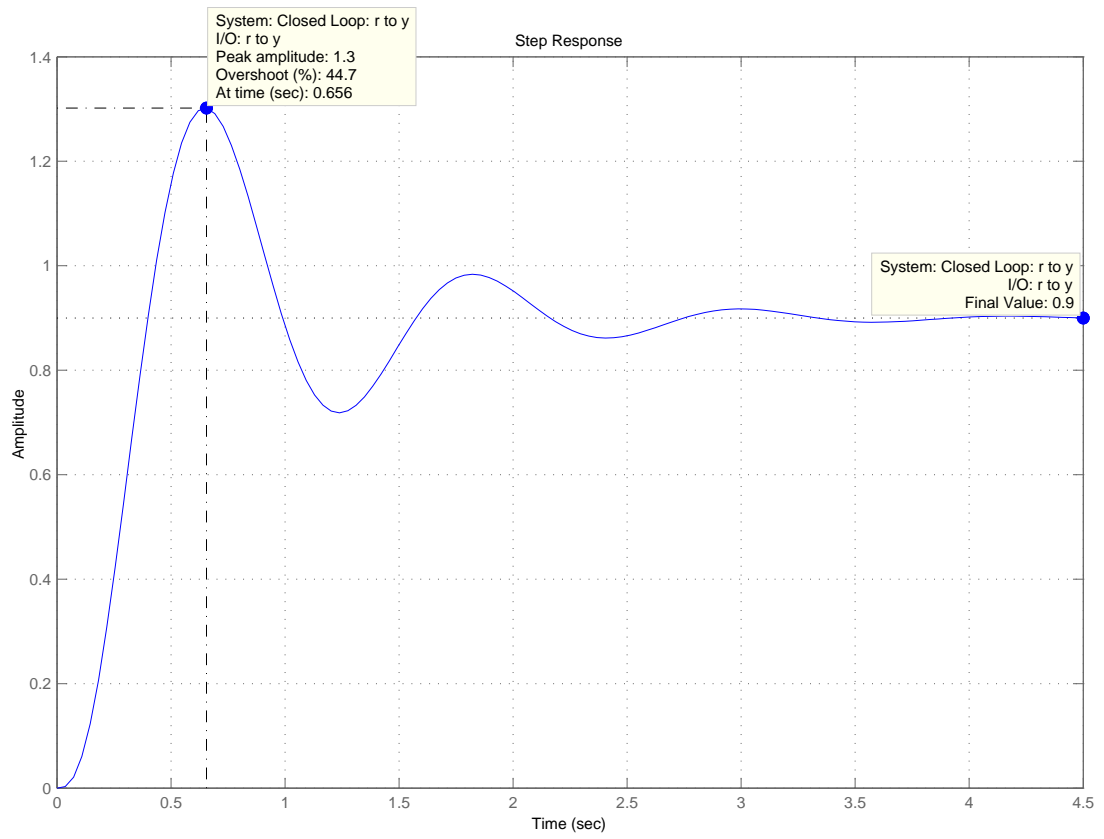


Figura 6: Respuesta al escalón unitario

Red de atraso de fase

Especificaciones en régimen permanente

El error en régimen permanente tiene que ser menor del 10%, por tanto,

$$e_{rpp} \leq 10\% \rightarrow \frac{1}{1 + K_p} \leq 0.1 \rightarrow K_p \geq 9 \rightarrow K_{reg} \geq 4.5$$

es decir, dado que la ganancia estática $G(0)$ del sistema es 2, debemos multiplicar la ganancia actual en un factor $K_{reg} = 4.5$ para poder tener una ganancia en bucle abierto en continua de 9.

Margen de fase:

- Para cumplir el margen de fase es necesario determinar la frecuencia ω_1 a la que la fase es la deseada. Tomando un margen de fase holgado

$$-180^\circ + \overbrace{\text{MF} + M_s}^{\text{ángulo a aportar}}$$

siendo M_s un margen de seguridad entre 5° y 12° . Tomamos, por ejemplo, como ángulo a aportar unos 10° más de lo necesario, es decir, 50° . Buscando en el dibujo la frecuencia a la que la fase es de unos -130° , encontramos que

$$\omega_1 \approx 2 \text{ rads/s}$$

La ganancia a dicha frecuencia podemos verla en el Bode del sistema $K_{reg} \cdot G(s)$

$$20 \log_{10} |K_{reg} \cdot G(j\omega_1)| \approx 13 \text{ dB}$$

Estos 13dB corresponden a una ganancia de 4.47 en p.u. La red de atraso de fase tiene que:

- por un lado no modificar la fase a dicha frecuencia, cuyo valor es el que deseábamos al principio (50°). Para esto, hacemos que el cero esté una década antes de ω_1

$$c = 0.1\omega_1 = 0.2$$

- por otro, reducir la ganancia en esa cantidad para que ω_1 sea la nueva frecuencia de cruce de ganancia. Ello requiere que $c/p = 4.47$

$$p = c/4.47 = 0.2/4.47 = 0.0447$$

quedando el regulador

$$C_{PI}(s) = K_{reg} \cdot \left(\frac{p}{c} \cdot \frac{s+c}{s+p} \right) = 4.5 \cdot \frac{0.0447}{0.2} \cdot \frac{s+0.2}{s+0.0447} = 1.00 \cdot \frac{s+0.2}{s+0.0447}$$

donde la parte encerrada entre paréntesis tiene ganancia estática 1. En definitiva, este regulador eleva la ganancia estática en 4.5 a bajas frecuencias, y consigue “desplazar” la ω_{cg} hacia bajas frecuencias sin tocar la fase, con lo que el nuevo cruce se produce a una fase mayor que antes, produciendo un incremento en el MF. El precio a pagar es un menor ancho de banda (menor ω_{cg})

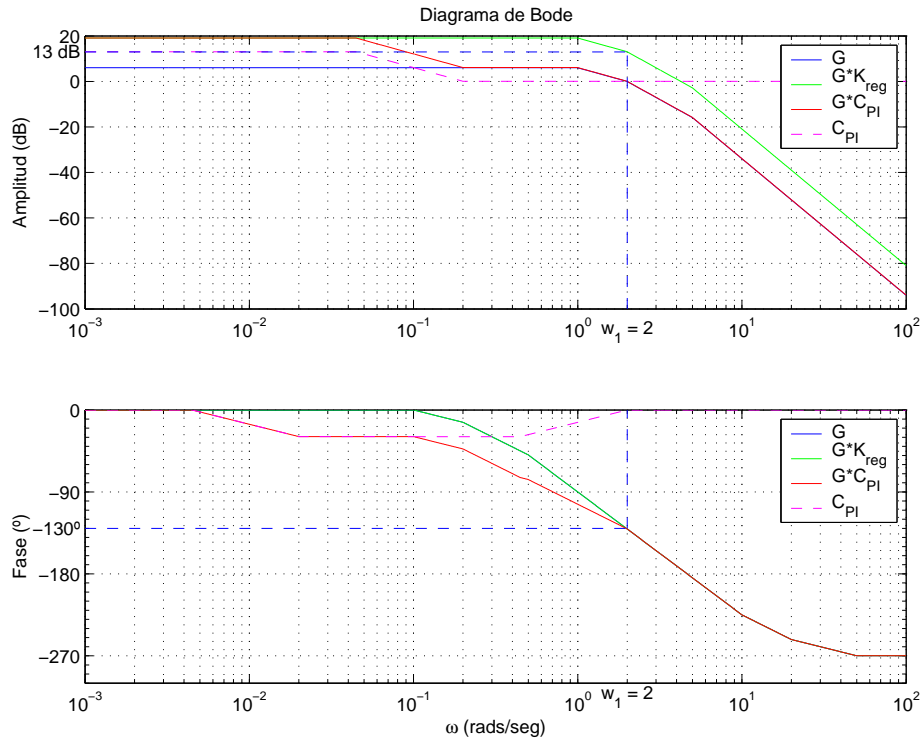


Figura 7: Bode (asintótico) en bucle abierto del sistema original $G(j\omega)$, sistema con ganancia pura $K_{reg}G(j\omega)$, sistema con la red de atraso de fase diseñada $C_{PI}(j\omega)G(j\omega)$ y del propio compensador $C_{PI}(j\omega)$

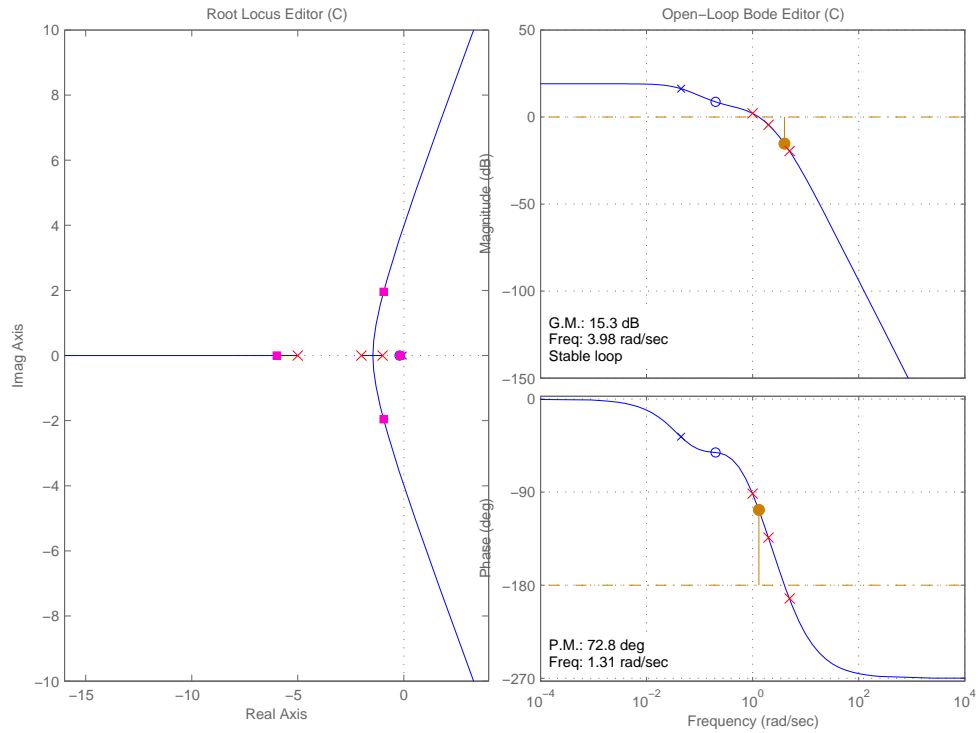


Figura 8: Situación en el Lugar de las Raíces. Nótese que el MF real es mayor que el especificado. Esto se debe a la diferencia entre los trazados asintótico y real.

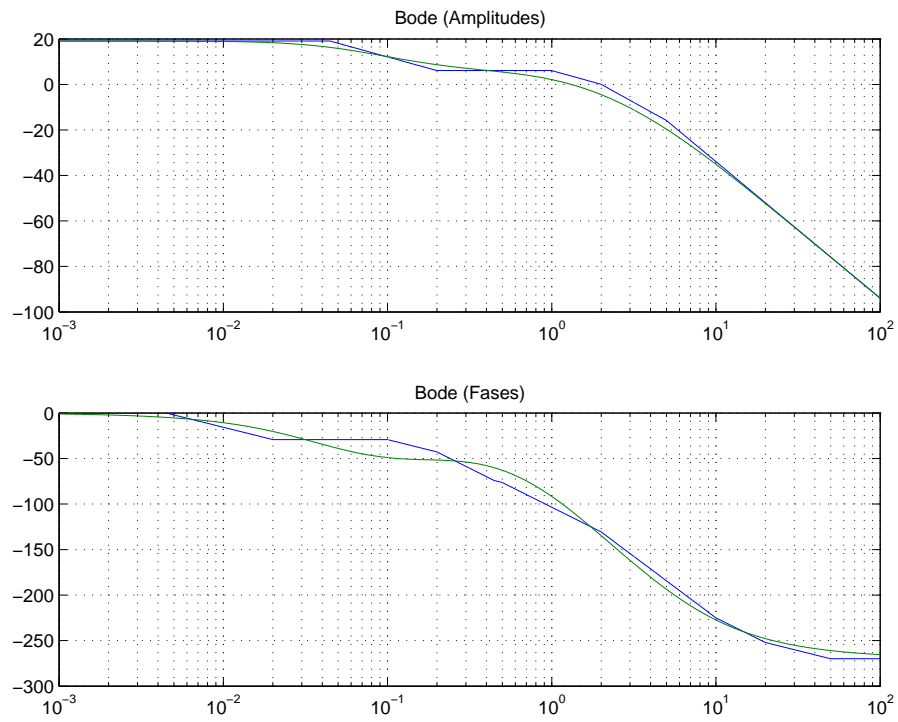


Figura 9: Comparación entre los trazados asintótico y real. Nótese que el real tiene una frecuencia de cruce de ganancia menor, lo que origina un MF mayor de lo esperado