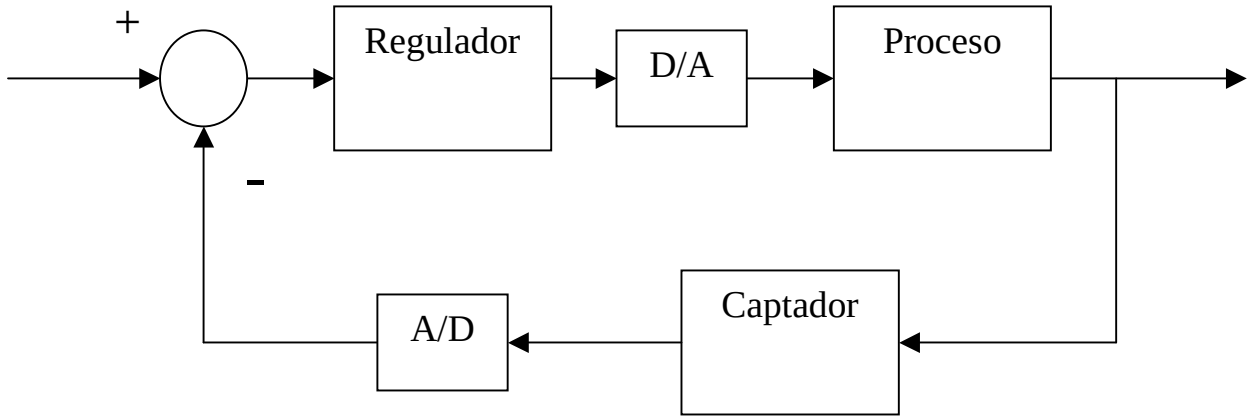
Introducción al Control Digital

Tema 10

Índice

- Ventajas e inconvenientes del control digital
- Sistemas muestreados
- Modelo matemático de los sistemas discretos
- Discretización de reguladores continuos
- Implementación
  - Algoritmo de control
  - Retardo computacional
  - El problema de la cuantificación
  - Filtro antialiasing
  - Selección del período de muestreo
  - Equipos industriales
- Bibliografía

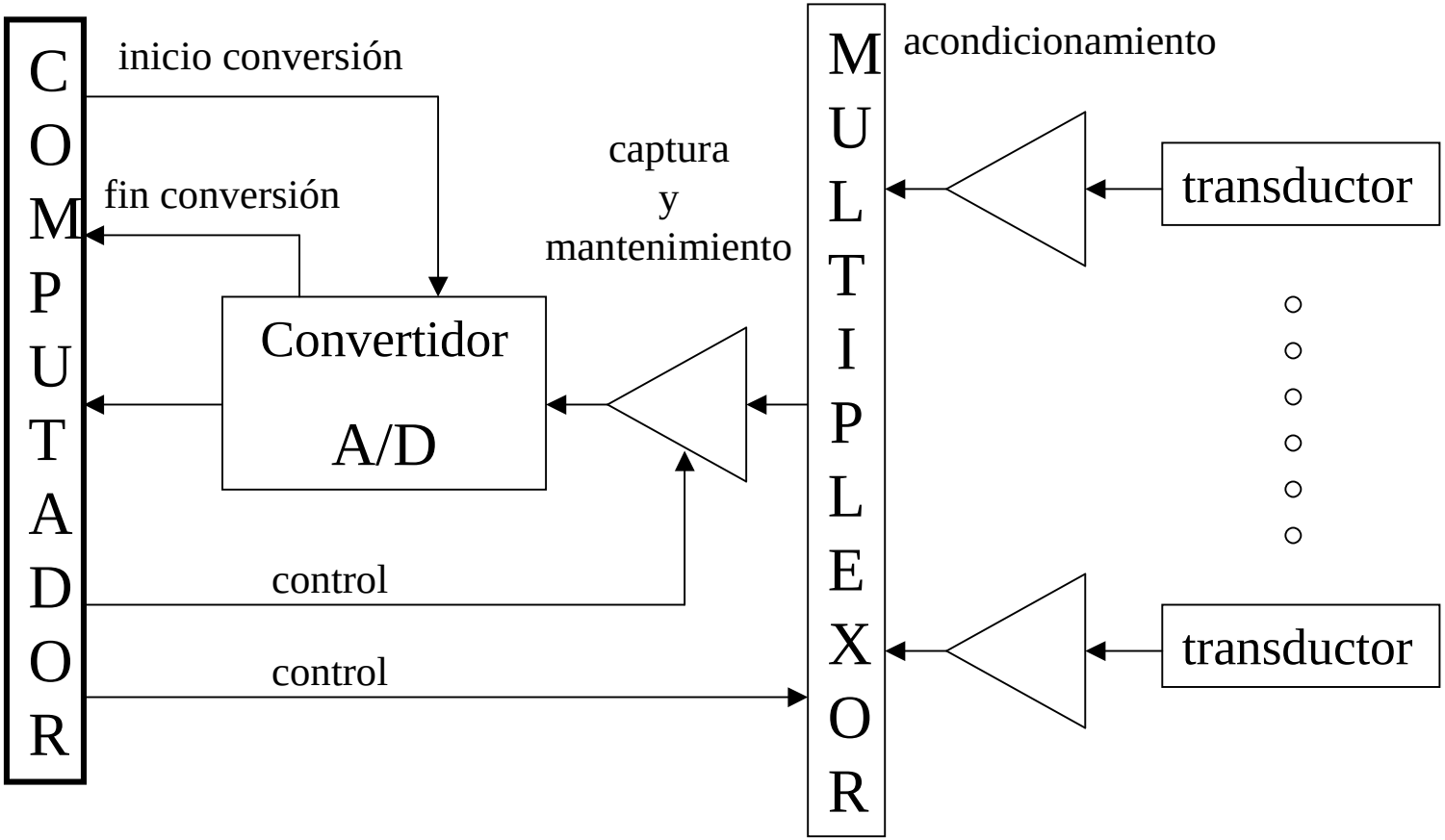
Esquema de control digital



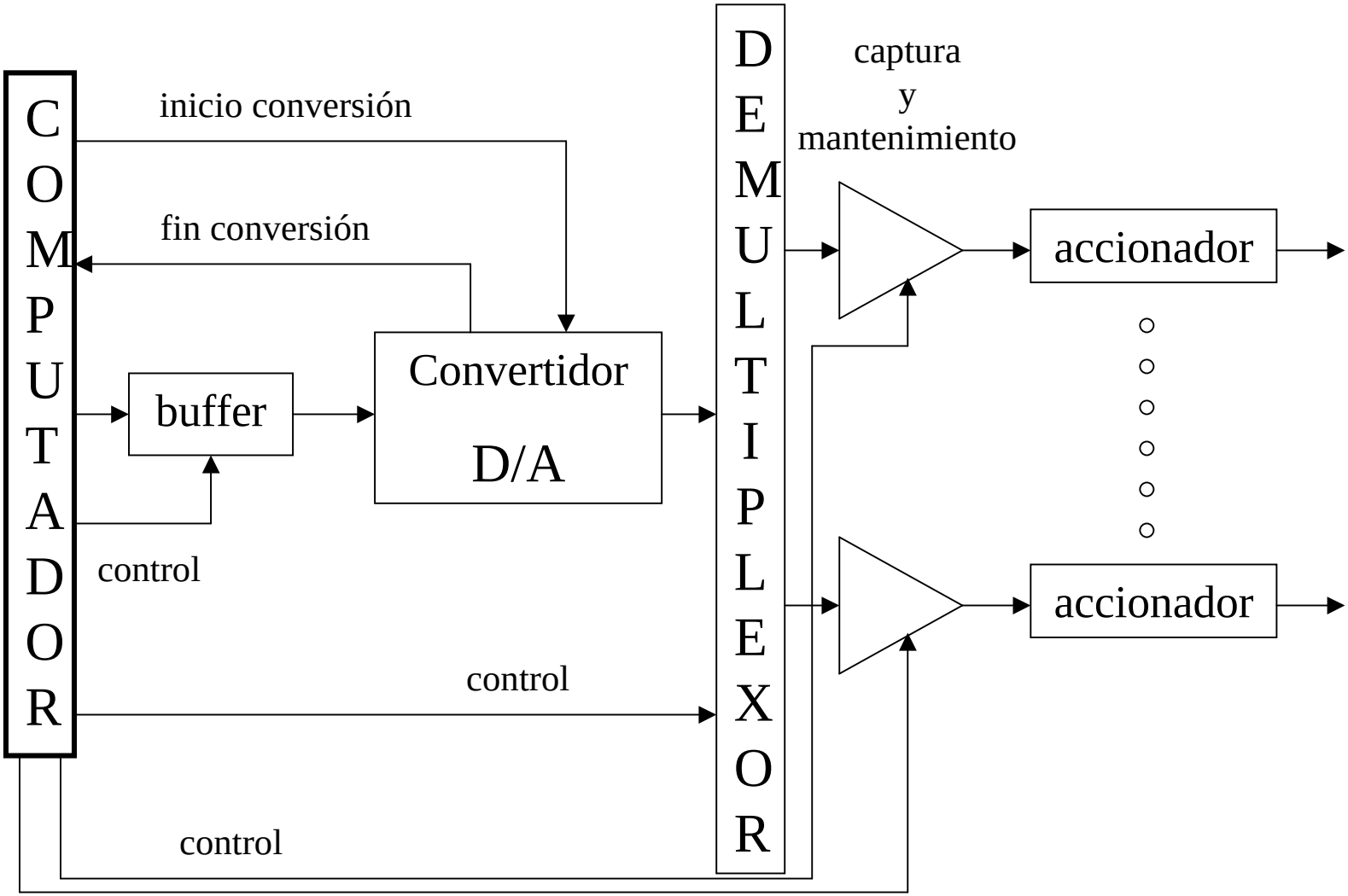
D/A: Convertidor Digital - Analógico

A/D: Convertidor Analógico - Digital

Estructura del bloque A/D



Estructura del bloque D/A



Ventajas del control digital

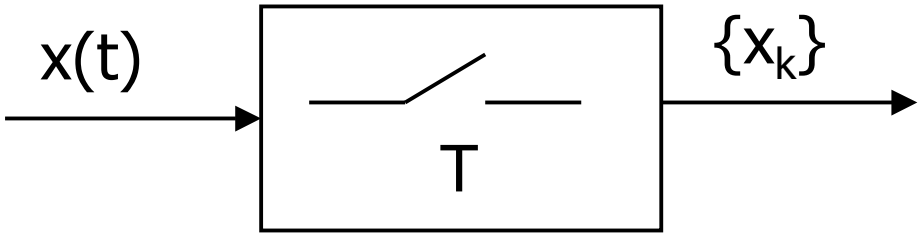
- No hay límite de complejidad del algoritmo
- Facilidad de cambio de estrategia
- Precisión más elevada en operaciones que con dispositivos analógicos (resolución, derivas, saturaciones).
- Posibilidad de efectuar funciones complementarias (almacenamiento, análisis, comunicaciones)

Nuevos problemas

- Muestreo
- Aliasing
- Reconstrucción
- Cuantificación
- Retardo

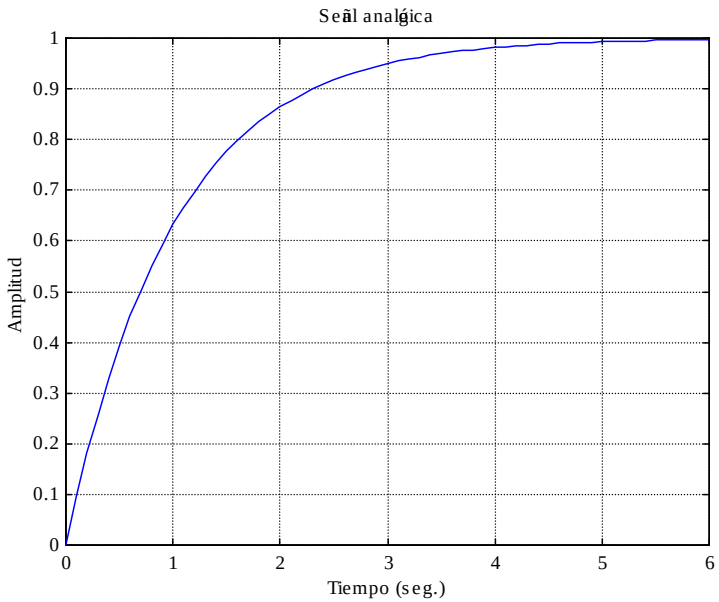
Muestreo

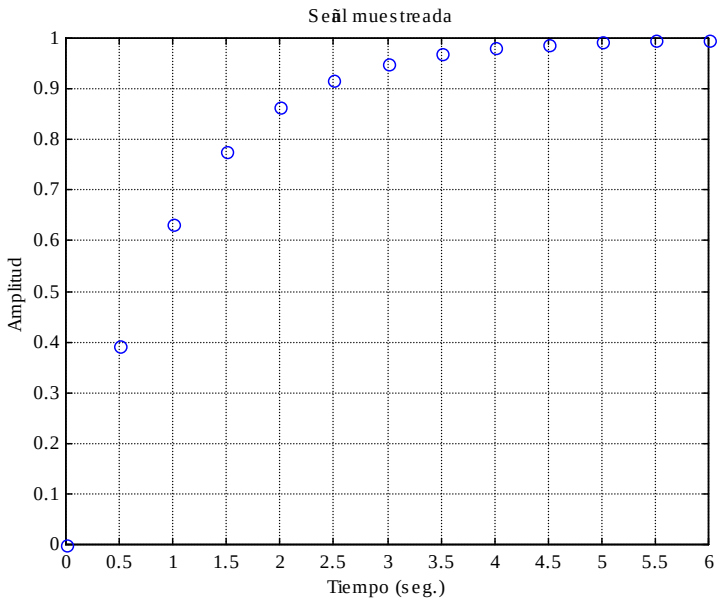
En esta operación se obtiene una **secuencia** de valores a partir de una **señal** analógica.



$$x_k = x(kT)$$

Muestreo. Ejemplo

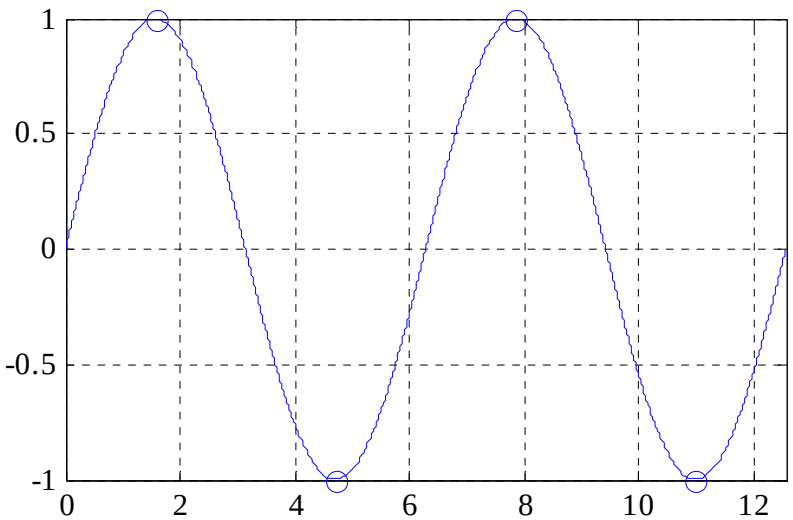


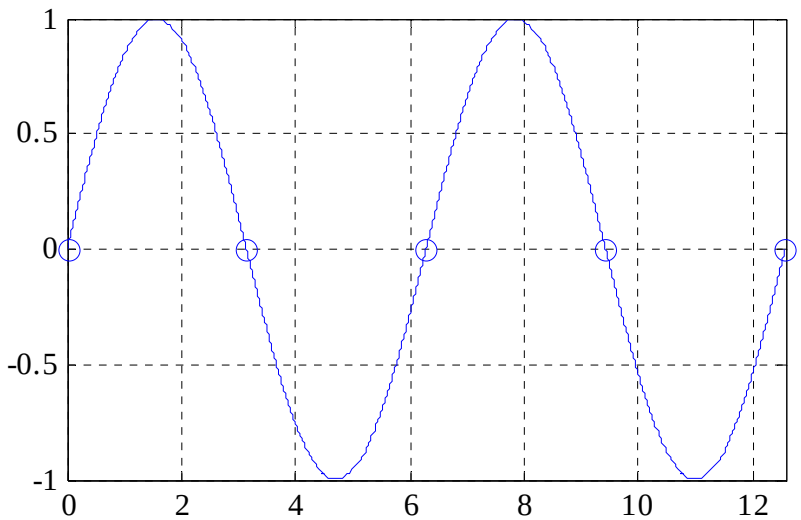


Muestreo. Teorema de Shannon

Una señal que no contenga componentes en frecuencias superiores a ω_0 puede ser reconstruida si se muestrea con una frecuencia mayor de $2\omega_0$.

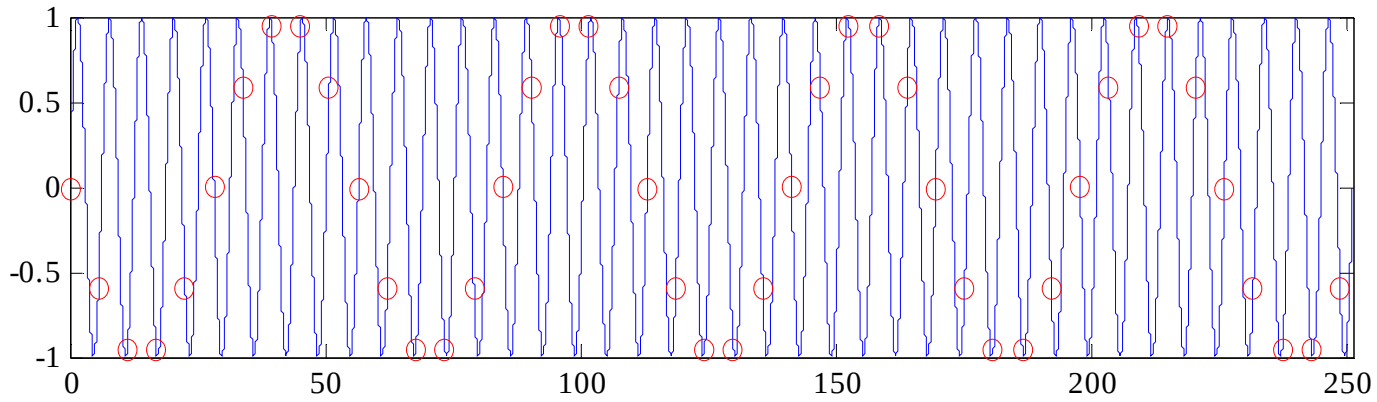
$$\omega_m > 2\,\omega_0$$





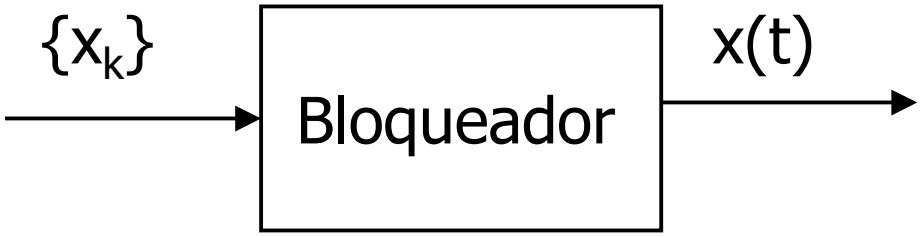
Muestreo. Aliasing

Cuando la frecuencia de Nyquist ($\omega_m/2$) es inferior a la frecuencia de la señal muestreada (ω_0), se produce el fenómeno conocido como *aliasing*, según el cual una señal de alta frecuencia es interpretada como una de baja frecuencia.



Reconstrucción

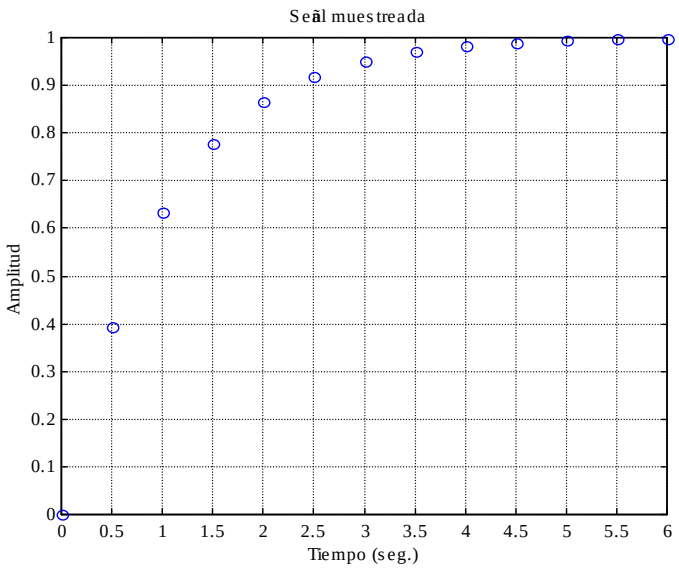
Proceso por el que a partir de una secuencia se construye una señal continua.

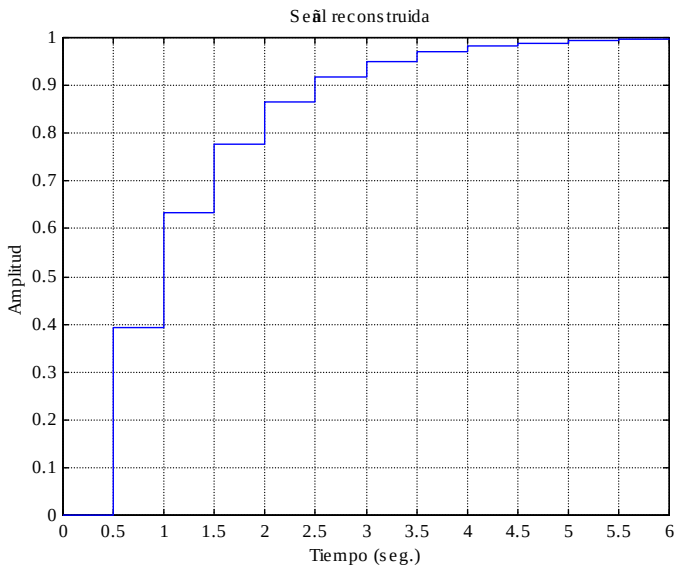


El más sencillo y habitual en control es el de orden 0.

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kt)\left[1(t - kT) - 1(t - (k+1)T)\right]$$

Reconstrucción





Sistemas discretos

- Son algoritmos que permiten transformar una secuencia en otra:

- Nos interesan los lineales, causales, dinámicos e invariantes, que se pueden expresar como ecuaciones en diferencias:

$$y_k = a_1\, y_{k-1} + \ldots + a_n\, y_{k-n} + b_0\, u_k + \ldots + b_m\, u_{k-m}$$

Secuencia de ponderación

- Para un sistema discreto lineal e invariante, es la secuencia de salida cuando la de entrada es $\{\delta_k\}$
  $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, ...\}$

- Convolución:

$$\{y_k\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i \cdot \{g_{k-i}\} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} g_i \cdot \{u_{k-i}\}$$

Estabilidad

- Un sistema discreto es estable, si ante cualquier secuencia de entrada acotada, la secuencia de salida también está acotada.

- Condiciones necesarias:
  - $\{g_k\}$ acotada
  - $\lim_{k \to \infty} g_k = 0$

- Condición necesaria y suficiente:
  - $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |g_k| < \infty$

Transformadas de una secuencia

- Dada una secuencia real $\{x_k\}$ / $x_k = 0$ para todo $k < 0$, se define su **transformada de Laplace** como la función:

$$X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot e^{-sk}, s \in C$$

- Se obtienen funciones periódicas y no racionales
- Dada una secuencia real $\{x_k\}$ se define su **transformada z** como la función:

$$X(z) = Z\{x_k\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \cdot z^{-k}, z \in C$$

Transformada z inversa

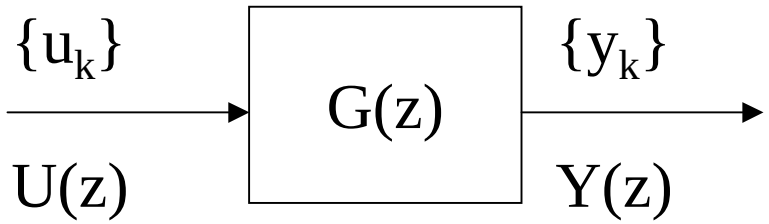
- Teorema de los residuos
- División larga
- Descomposición en fracciones simples
- Métodos computacionales
- Tablas

Propiedades de la transformada z

- Linealidad: $$\alpha \cdot Z[x_k] + \beta \cdot Z[y_k] = Z[\alpha \cdot x_k + \beta \cdot y_k]$$
- Desplazamiento: $$Z[x_{k-n}] = z^{-n} \cdot Z[x_k]$$
- Convolución: $$w_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n \cdot y_{k-n}$$ $$Z[w_k] = Z[x_k] \cdot Z[y_k]$$
- Tma. valor inicial (indice +): $$x_0 = \lim_{z \to \infty} X(z)$$
- Tma. valor final (indice +, y estable):

$$x_\infty = \lim_{k \to \infty} x_k = \lim_{z \to 1} [(1 - z^{-1}) \cdot X(z)]$$

Función de transferencia discreta



Dado un sistema discreto lineal, por su ecuación en diferencias:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \ldots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \ldots + b_m u_{k-m}$$

Aplicando transformadas, linealidad y operador desplazamiento:

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \ldots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \ldots + b_m z^{-m} U(z)$$

Se define la función de transferencia discreta:

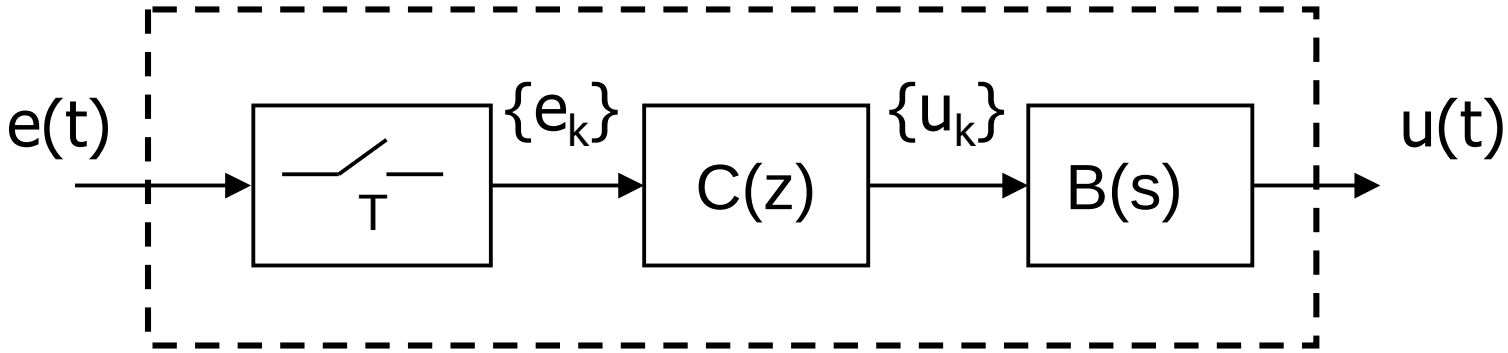
$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_n z^{-n}}$$

Discretización de reguladores

- Discretización de reguladores continuos
- Aproximación de respuesta temporal.
- Integración numérica
  - Operador derivada (adelantada y atrasada)
  - Operador integral (adelantada y retrasada)
  - Operador integral (integración trapezoidal). Tustin.
- Regiones de estabilidad
- Distorsión de frecuencia (*warping*)

Discretización de reguladores continuos

Una vez diseñado un regulador continuo para un proceso, se trata de obtener un regulador discreto que aproxime su funcionamiento.



La transformación exacta, $z = e^{Ts}$, no da lugar a expresiones racionales

Aproximación de la respuesta temporal

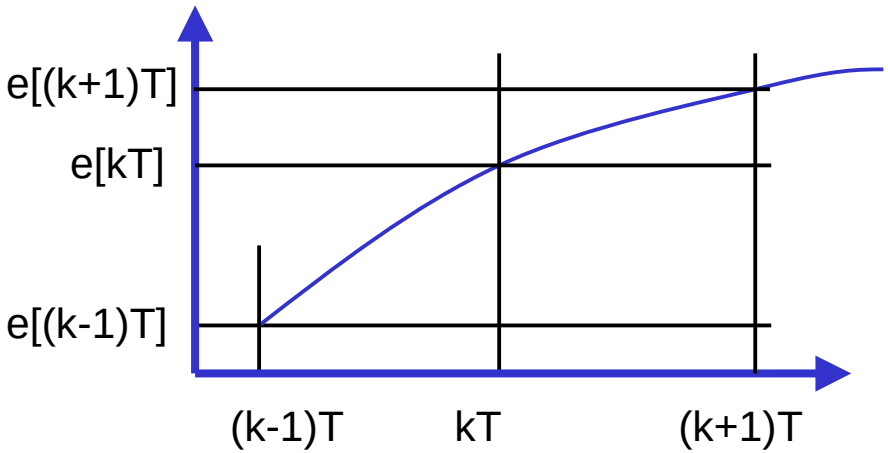
- Igualando la respuesta ante escalón:

$$C(z)\frac{1}{1-z^{-1}} = Z\left[C(s)\frac{1}{s}\right]$$

$$C(z) = \left(1-z^{-1}\right)Z\left[C(s)\frac{1}{s}\right]$$

- Igualando la respuesta ante rampa. Da resultados más exactos sobre todo en las fases.

Operador derivada



Diferencia adelante

$$\left.\frac{de(t)}{dt}\right|_{t=kT} = \frac{e[(k+1)T]-e[kT]}{T}$$

$$s \approx \frac{z-1}{T} = \frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}$$

$$C(z) \approx \left[C(s)\right]_{s=\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}}$$

Diferencia atrás

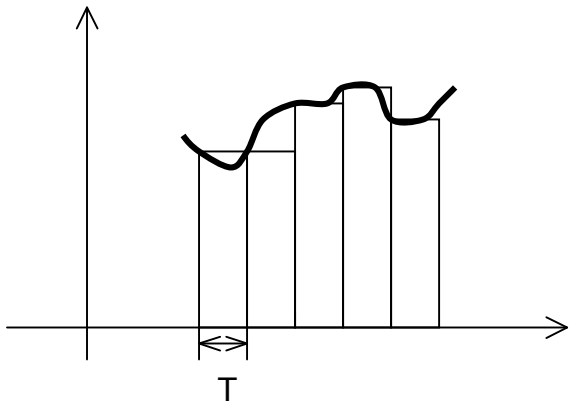
$$\left.\frac{de(t)}{dt}\right|_{t=kT} = \frac{e[kT]-e[(k-1)T]}{T}$$

$$s \approx \frac{1-z^{-1}}{T} = \frac{z-1}{Tz}$$

$$C(z) \approx \left[C(s)\right]_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

Integral retrasada

Aproxima el operador integral (1/s) por el sistema discreto obtenido sumando rectángulos, con la entrada retrasada



$$u_k = \sum_{i=0}^{k} Te_{i-1} = u_{k-1} + Te_{k-1}$$

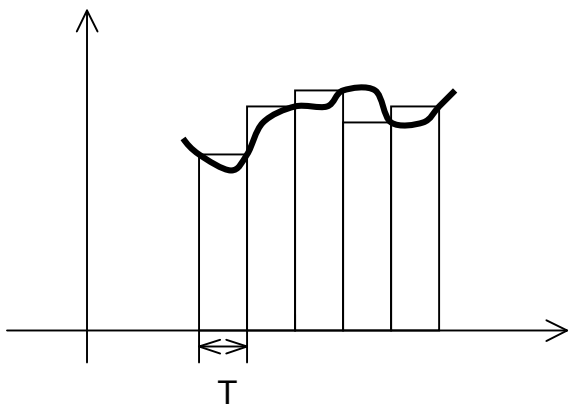
$$(1 - z^{-1})U(z) = Tz^{-1}E(z)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{Tz^{-1}}{1 - z^{-1}} = \frac{T}{z-1} \approx \frac{1}{s}$$

$$C(z) \approx \left[C(s)\right]_{s=\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}}$$

Integral adelantada

Aproxima el operador integral (1/s) por el sistema discreto obtenido sumando rectángulos, con la entrada adelantada



$$u_k = \sum_{i=0}^{k} Te_{i-1} = u_{k-1} + Te_k$$

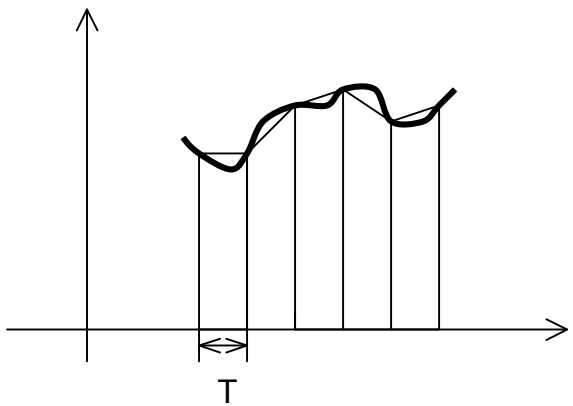
$$(1 - z^{-1})U(z) = TE(z)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{1 - z^{-1}} = \frac{Tz}{z-1} \approx \frac{1}{s}$$

$$C(z) \approx \left[C(s)\right]_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

Integral trapezoidal. Tustin

Aproxima el operador integral (1/s) por el sistema discreto obtenido sumando trapecios



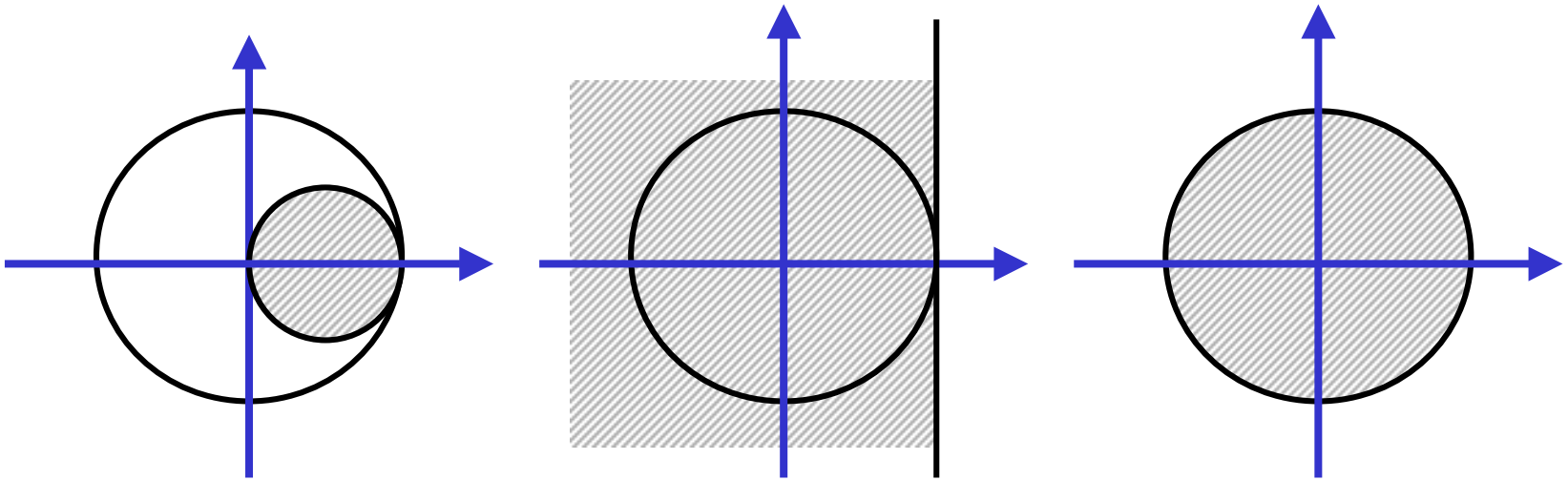
$$u_k = u_{k-1} + \frac{T}{2}(e_k + e_{k-1})$$

$$2(1 - z^{-1})U(z) = T(1 + z^{-1})E(z)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2}\frac{(1+z^{-1})}{(1-z^{-1})} = \frac{T}{2}\frac{(z+1)}{(z-1)} \approx \frac{1}{s}$$

$$C(z) \approx \left[C(s)\right]_{s=\frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}}$$

Regiones de estabilidad



Euler

Tustin

$$C(z) \approx [C(s)]_{s=\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}}$$

$$C(z) \approx [C(s)]_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}}$$

$$C(z) \approx [C(s)]_{s=\frac{2}{T}\frac{(1-z^{-1})}{(1+z^{-1})}}$$

Distorsión de frecuencia

En las aproximaciones se distorsiona la escala de frecuencia.

Importante al discretizar un paso banda.

$$\omega' = \frac{2}{T}\tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$ *frequency warping*

Tiene valores pequeños para valores bajos de ωT.

Se puede corregir el efecto para una frecuencia determinada (*frequency prewarping*).

Algoritmo de control

Periódicamente (cada período de muestreo) se debe ejecutar el siguiente algoritmo de control:

- Captura y conversión Analógico-Digital de la señal del proceso (y de la referencia si procede).
- Cálculo del error (comparación entre la referencia y la señal del proceso).
- Cálculo de la acción de control.
- Conversión Digital-Analógica de la acción de control.

Algoritmo de control. Cálculo de la señal de control

- A partir del modelo discreto del controlador obtenido bien por discretización, bien por diseño en el plano *z*, se obtiene directamente la ecuación en diferencias que se implementa en el computador:

$$y_k = \sum_{i=0}^{m} b_i u_{k-i} - \sum_{i=1}^{n} a_i y_{k-i}$$

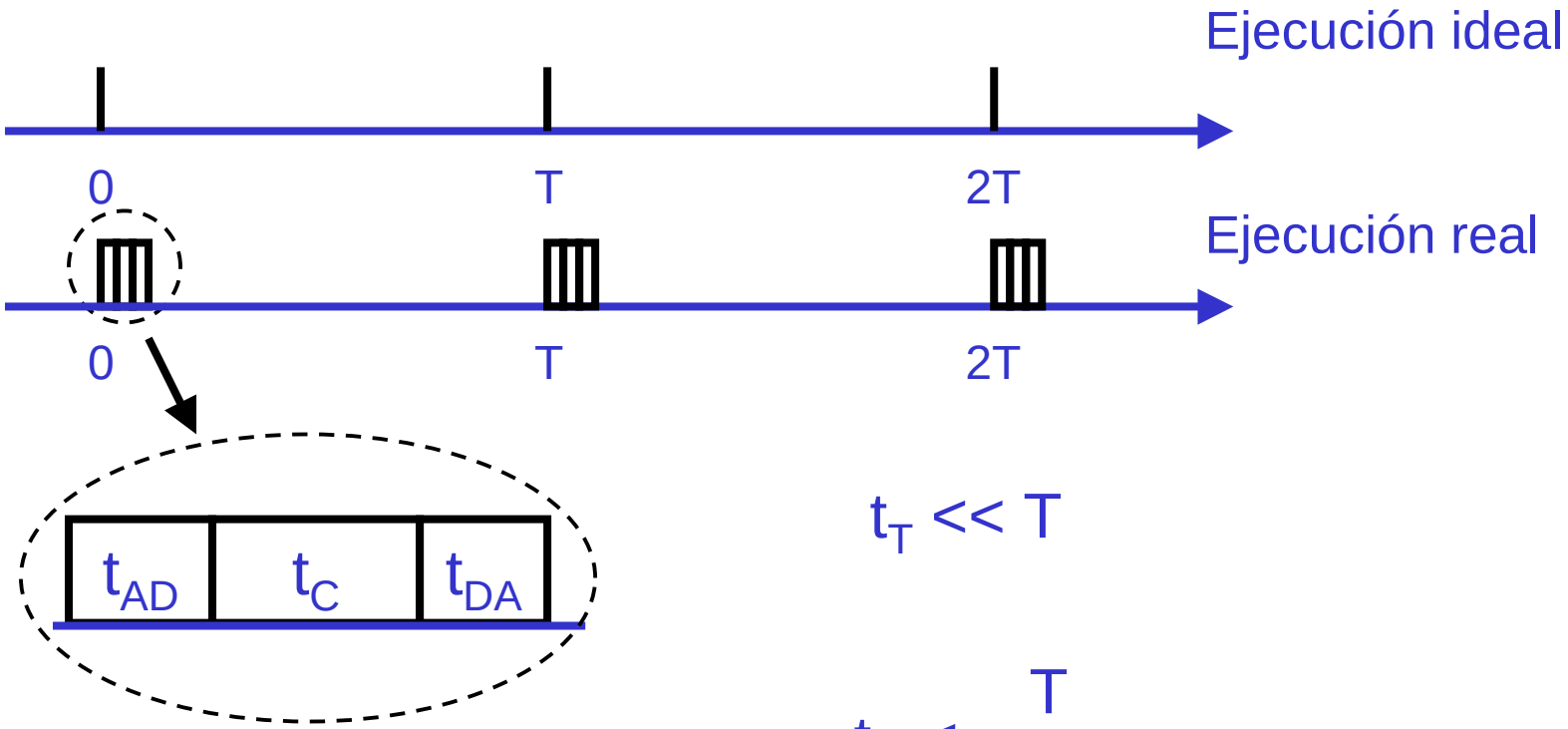
- Existen técnicas de implementación que minimizan tanto las necesidades de almacenamiento como los errores en los cálculos

Algoritmo de control. Estrategias

Para conseguir la ejecución periódica del algoritmo de control se pueden plantear dos estrategias:

- Muestreo
  - Más simple.
  - Absorbe todos los recursos. No puede realizar otras operaciones durante las esperas
- Interrupción
  - Programación más compleja.
  - Permite realizar otras operaciones entre 2 períodos de muestreo.

Algoritmo de control. Retardo computacional



$$t_T << T$$

$$t_T < \frac{T}{10}$$

$$t_T = t_{AD} + t_C + t_{DA}$$

Algoritmo de control. Retardo computacional

- Para disminuir el retardo entre la captura y la escritura de la señal, conviene minimizar el número de operaciones entre ambas operaciones.
- Una opción es realizar el precálculo de parte de los valores, al final de un período para tenerlos listos para el siguiente.
- El algoritmo de control modificado sería:
  - Captura (AD)
  - Cálculo del error
  - Cálculo mínimo (en operaciones) de la acción de control
  - Escritura (DA)
  - Precálculo (con valores disponibles) para próximo período

Cuantificación en los coeficientes

Este error se hace más grande a medida que:

- aumenta el orden de la función de transferencia,
- los polos o ceros se aproximan a la circunferencia de radio unidad.

Soluciones:

- Programación en serie
- Programación en paralelo
- Programación en escalera

Cuantificación

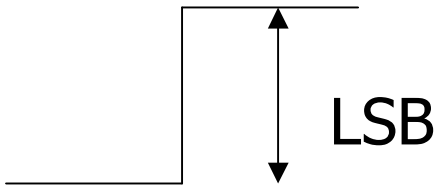
Al intentar representar un número real con un número finito de bits, se produce un error de cuantificación.

Puede ocurrir:

- En la conversión (A/D y D/A)
- En los cálculos
- En los parámetros de la ecuación en diferencias

Cuantificación AD. Modelo

Este error se puede modelar como un ruido con distribución uniforme, de valor máximo:



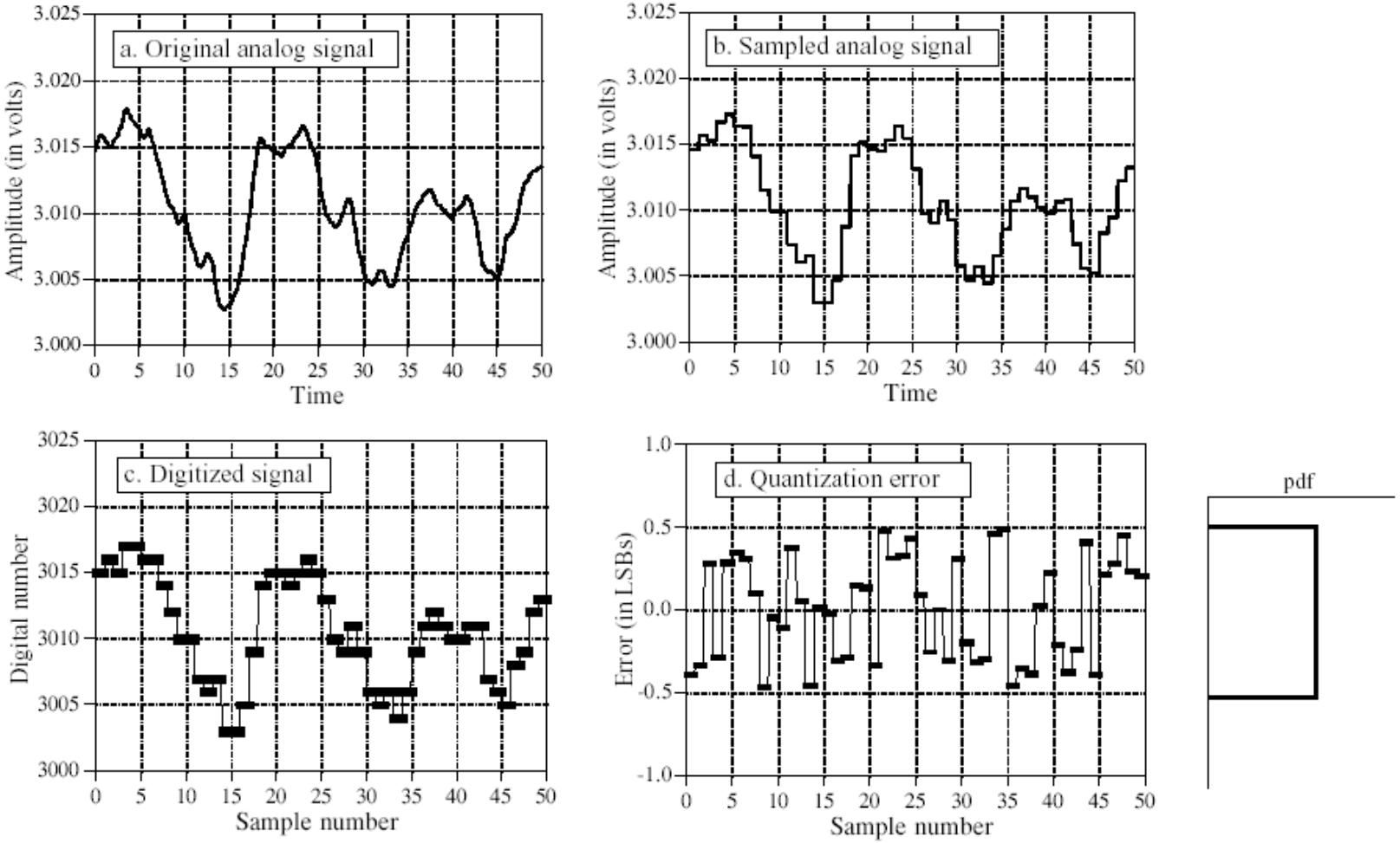
Redondeo q = ±½LSB

Truncado q = LSB

y desviación típica:

$$\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}} LSB$$

Cuantificación AD. [Smith-97]



Cuantificación AD. Ejemplo

- Rango: 0 – 1 V
- Tarjeta 8 bits (0 – 2^8-1)
- Error sensor: 1 mV (rms)

1 V – 255 LSB

1 mV – 0.255 LSB

$$\sigma_{sensor} = 0.255 LSB$$

$$\sigma_{A/D} = \frac{1}{\sqrt{12}} LSB \approx 0.29 LSB$$

$$\sigma = \sqrt{0.29^2 + 0.255^2} LSB$$

La conversión introduce un incremento del error del 50%

Cuantificación en los cálculos

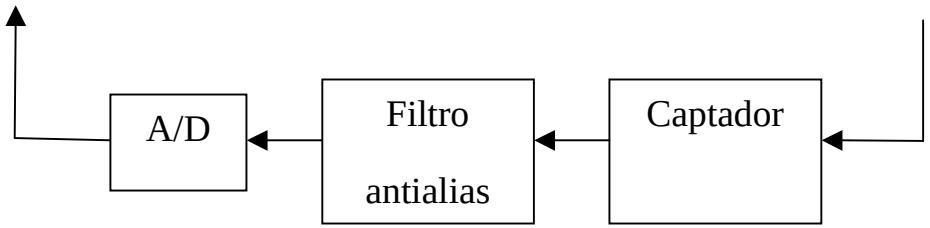
- En sistemas que realicen los cálculos en doble precisión, se dispone de 64 bits, con lo que los errores normalmente serán varios órdenes de magnitud menores que los cometidos en los conversores.
- Si se trabaja en coma fija, con 16 bits o menos, hay que ser muy cuidadoso pues el resultado de las operaciones puede ser muy sensible a la forma en que se implementen.

Filtrado de alias

Puede producirse aliasing con los ruidos de alta frecuencia que entran a través del captador.

Al ser convertidos en ruidos de baja frecuencia por el muestreo, el sistema amplificará sus efectos en lugar de atenuarlos, deteriorando el control.

La solución es introducir un filtro analógico, entre captador y muestreador que elimine el ruido.

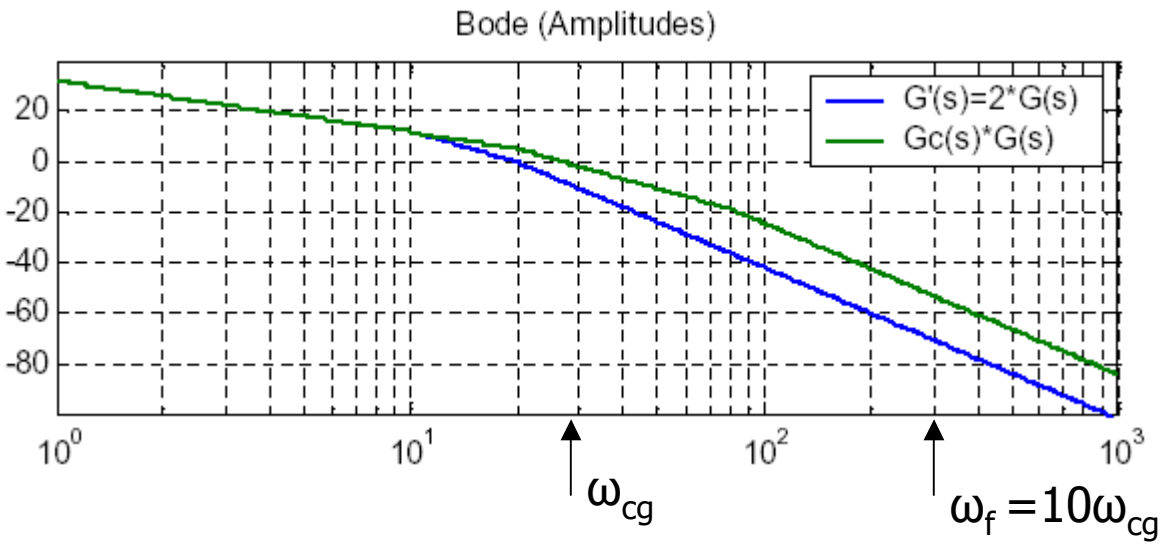


Diseño del filtro

Si se conoce el rango de frecuencias del ruido se puede diseñar y colocar el filtro de modo que la atenuación sea suficientemente.

Para no perjudicar el MF, el filtro deberá estar al menos una década por encima de la frecuencia de cruce de ganancia.

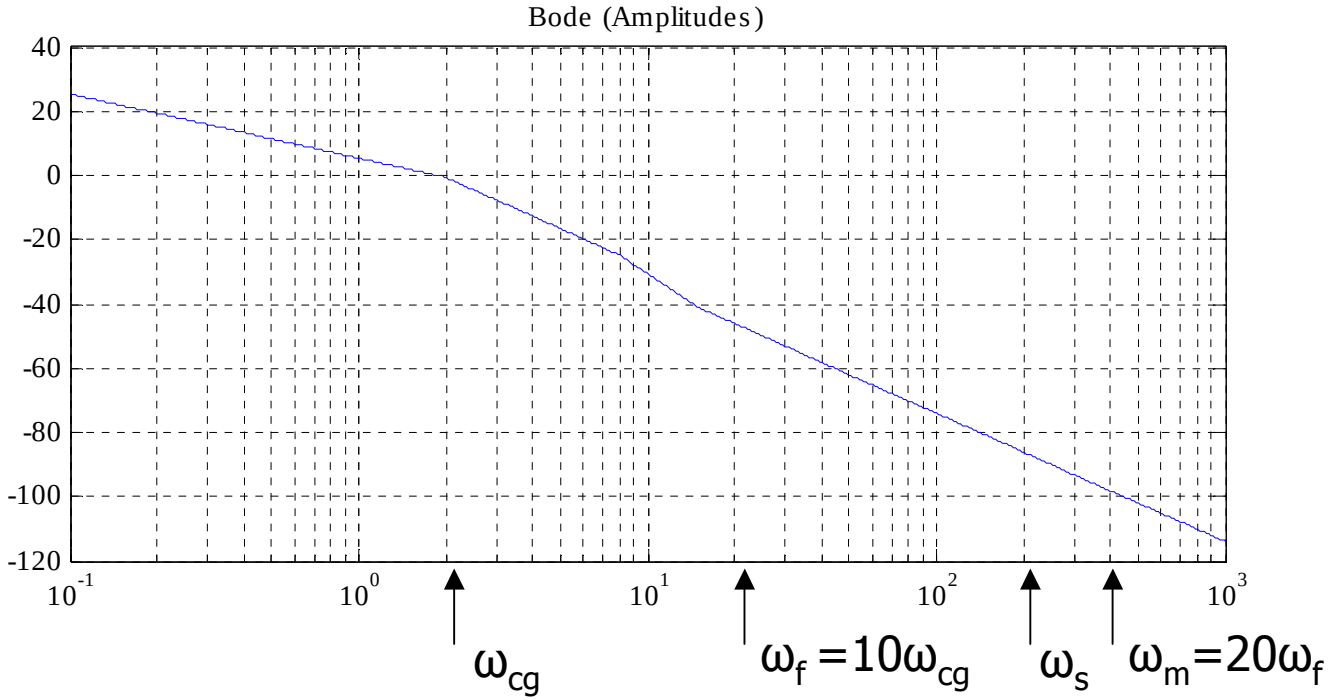
Si no es posible, habrá que tener en cuenta la dinámica del filtro en el diseño del compensador.



Elección del período de muestreo

- La elección del período de muestreo puede ser crítica a la hora de controlar un sistema
- Un período de muestreo grande hará que el controlador reaccione con lentitud tanto a consigna como a perturbaciones, lo que inestabiliza el sistema. Aumenta la sobreoscilación y disminuye el amortiguamiento.
- Un período de muestreo pequeño provocará una pérdida de tiempo al obligar a calcular la misma acción de control infinidad de veces.

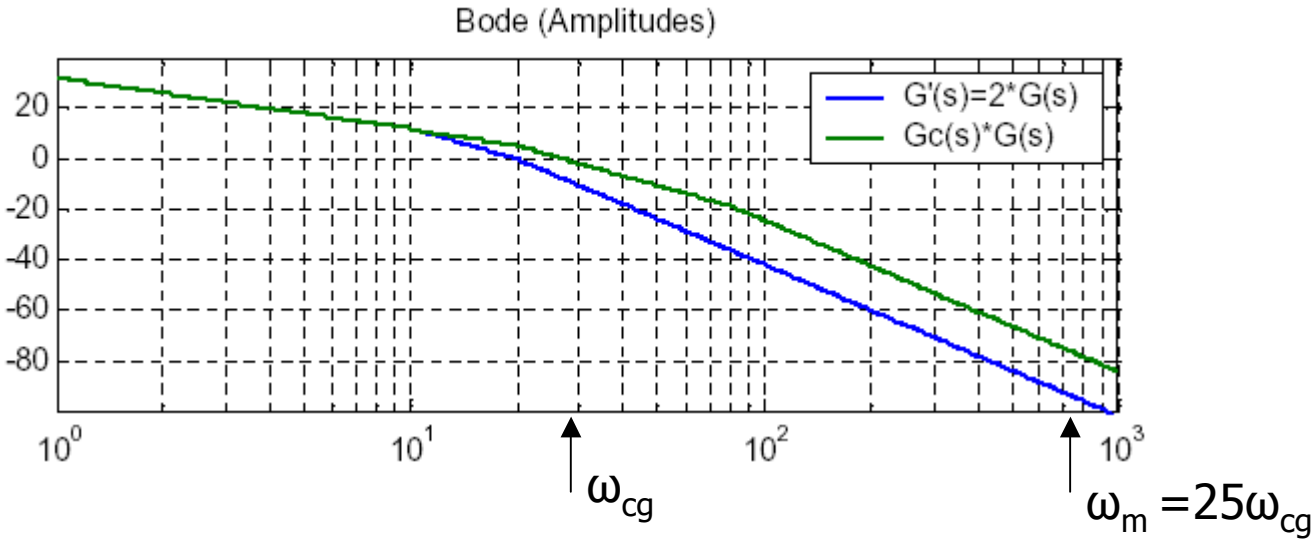
Elección del período de muestreo



Si se coloca filtro antialiasing, se calculará la frecuencia de muestreo como 10 a 20 veces superior a la del filtro, para conseguir una atenuación suficiente antes de muestrear.

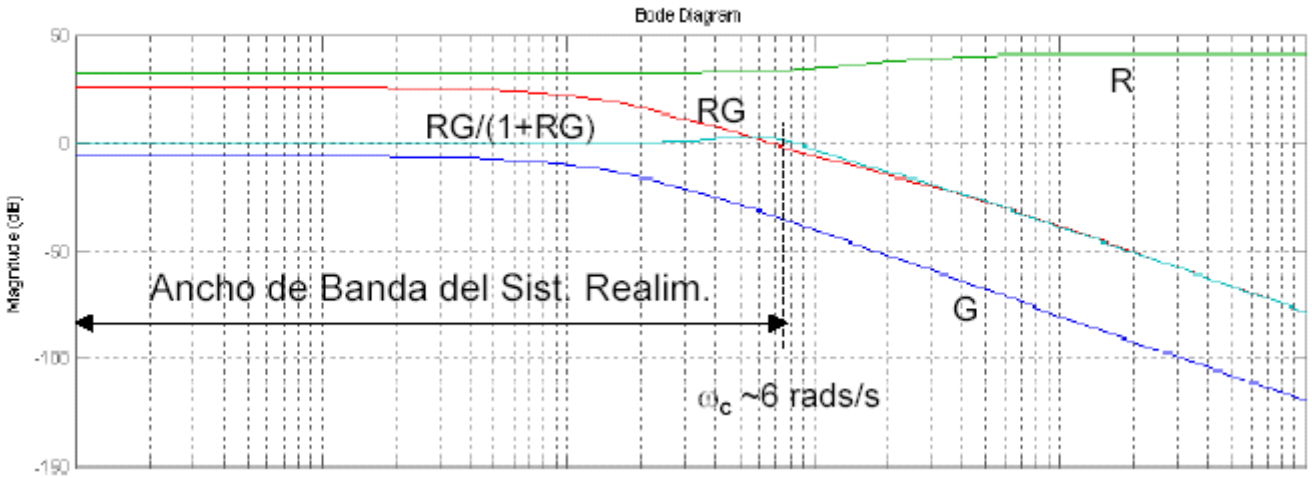
Elección del período de muestreo

Cuando no hace falta el filtro antialiasing:



A partir de la frecuencia natural del sistema realimentado, (o de la frecuencia de cruce de ganancia, como aproximación), se elegirá la frecuencia de muestreo como 20-40 veces superior.

Ejemplo



$$\boxed{f_m = 100 \cdot \frac{6}{2\pi} \approx 100\text{Hz}} \quad \rightarrow \quad \boxed{T_m = 10\text{ms}}$$

Ejemplo

$$R(s) = 121.33 \cdot \frac{s+10}{s+30}$$

$$s \approx \frac{z-1}{T_m}$$

y sustituyendo esta expresión en $R(s)$ queda

$$\begin{aligned} R(z) &= 121.33 \cdot \frac{z-1+10T_m}{z-1+30T_m} \\ &= 121.33 \cdot \frac{z-0.9}{z-0.7} \end{aligned}$$

Ejemplo

Esto se traduce en un algoritmo

```
hacer cada 10 ms
  LEER r,y
  e = r-y
  u = 0.7*up + 121.33*e - 121.33*0.9*ep

  ESCRIBIR u
  up = u          % Almacenamos entrada pasada (en k-1)
  ep = e          % Almacenamos error   pasado (en k-1)
f_hacer
```

Implementación. Equipos utilizados.

- Reguladores industriales (PID's digitales)
- Autómatas Programables
  - Módulos PID.
  - Funciones PID programadas en ROM + Módulo analógico
  - Algoritmos programados por el usuario + Módulo analógico
- Ordenadores Industriales
  - Tarjeta AD/DA + Software de Adquisición y Control

Bibliografía

1. [ARACIL-81] R. Aracil et al., "Sistemas discretos de control. Representación externa". Sección de publicaciones, ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid, 1981.
2. [ASTROM-88] K.J. Aström et al., "Sistemas controlados por computador", Paraninfo, 1988.
3. [ASTROM-97] K.J. Aström et al., "Computer-Controlled Systems", Prentice Hall, 1997.
4. [GOMEZ-98] J. Gómez Campomanes, "Sistemas digitales de control", Universidad de Oviedo, 1998.
5. [HOUPIS-85] C. H. Houpis et al., "Digital Control Systems", McGraw Hill, 1985.
6. [ISERMANN-89] R. Isermann, "Digital Control Systems", Springer Verlag, Berlin, 1989.
7. [KUO-03] B.C. Kuo, "Sistemas de control digital", CECSA, 2003
8. [LOPEZ-93] H. López, "Control por computador", Universidad de Oviedo, 1993.
9. [OGATA-96] K. Ogata, "Sistemas de Control en Tiempo Discreto", Prentice Hall, 1996