

# **Sistemas Automáticos**

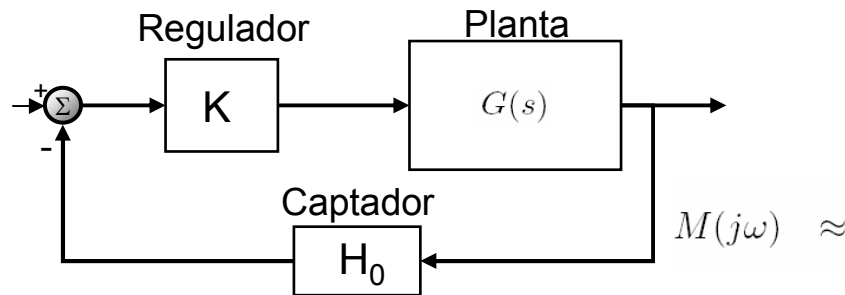
# **Tema 7**

## **Diseño de Reguladores en Frecuencia**

### Contenido

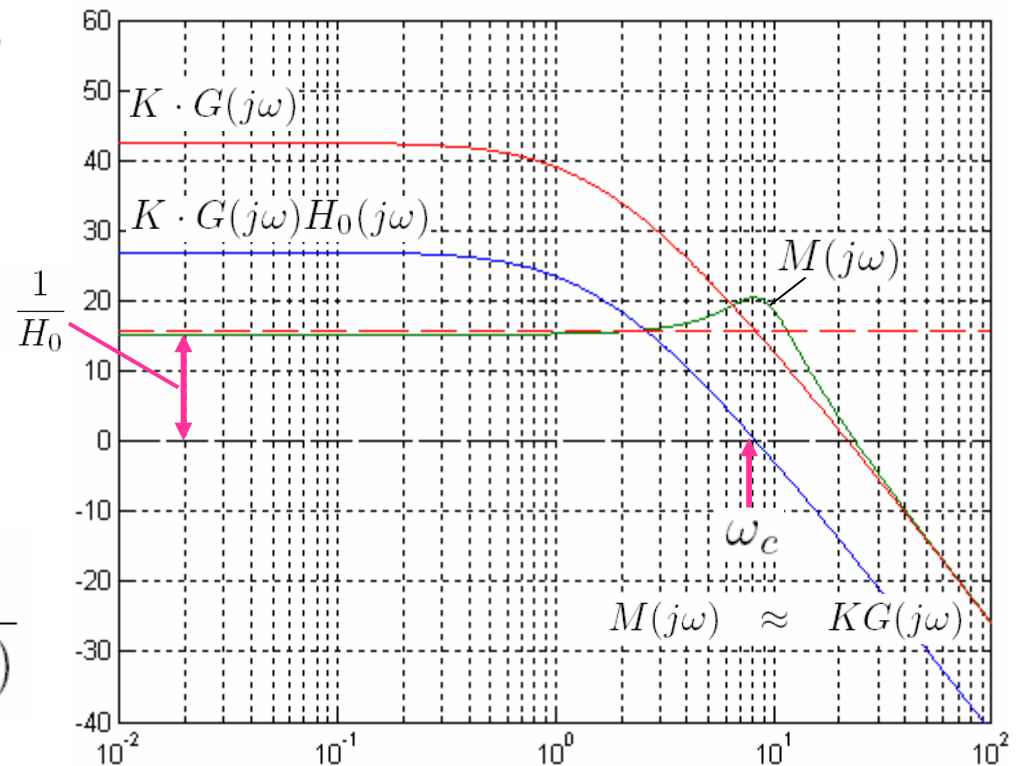
-

# Respuesta frecuencial en Bucle Cerrado



Función de transferencia en bucle cerrado:

$$M(j\omega) = \frac{K \cdot G(j\omega)}{1 + K \cdot G(j\omega)H_0(j\omega)}$$



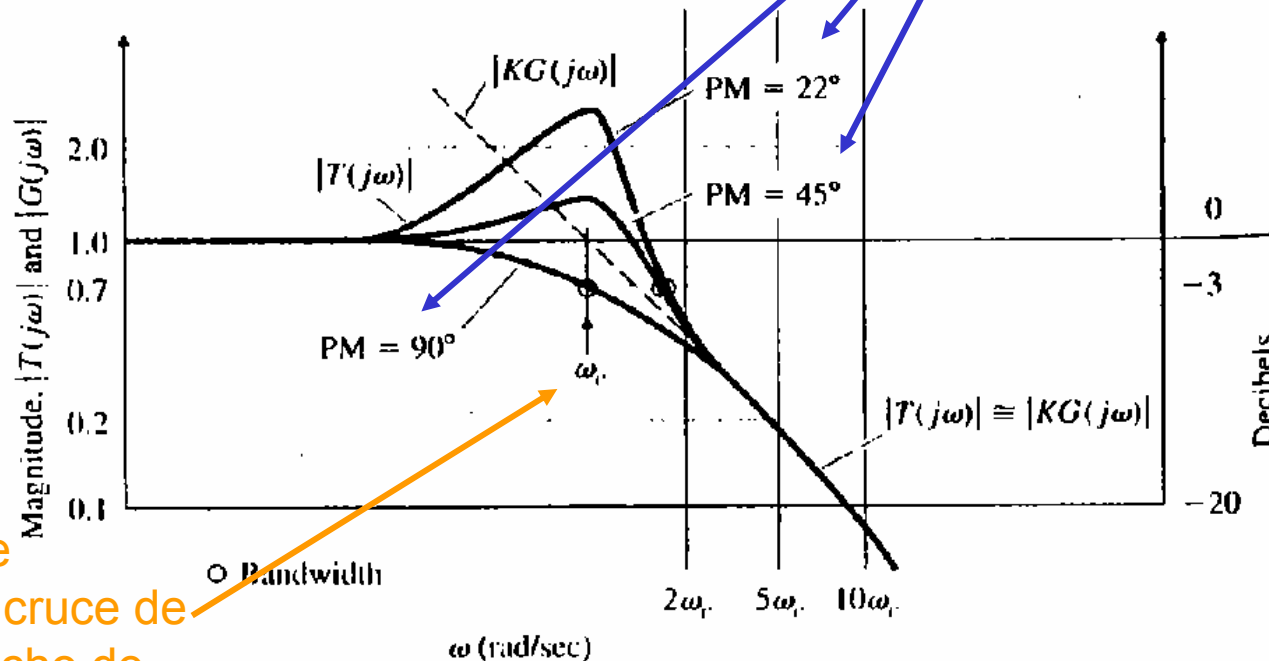
$$\begin{aligned} |KG(j\omega)H_0| &\gg 1 & \omega &\ll \omega_c \\ |KG(j\omega)H_0| &\ll 1 & \omega &\gg \omega_c \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad M(j\omega) \approx \begin{cases} \frac{1}{H_0} & \omega \ll \omega_c \\ KG(j\omega) & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

# Respuesta frecuencial en Bucle Cerrado

A la frecuencia de cruce de ganancia,  $\omega_c$

$$M(j\omega_c) = \frac{1}{1 + KG(j\omega_c)H_0} = \frac{1}{1 + 1_{\{MF-180^\circ\}}}$$

Relación entre  
Margen de Fase (MF)  
y Frecuencia de  
resonancia ( $M_r$ )



Relación entre  
frecuencia de cruce de  
ganancia y ancho de  
banda

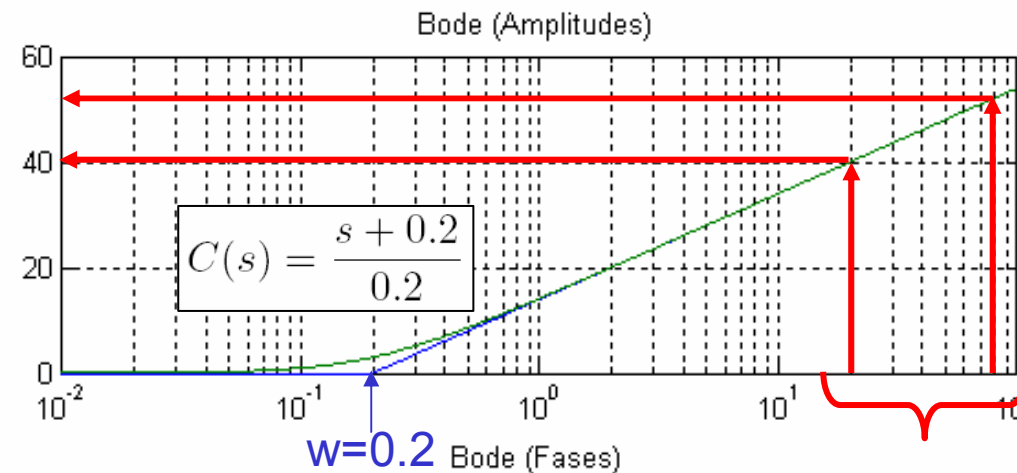
# Red de Adelanto de Fase

## Cero puro

2

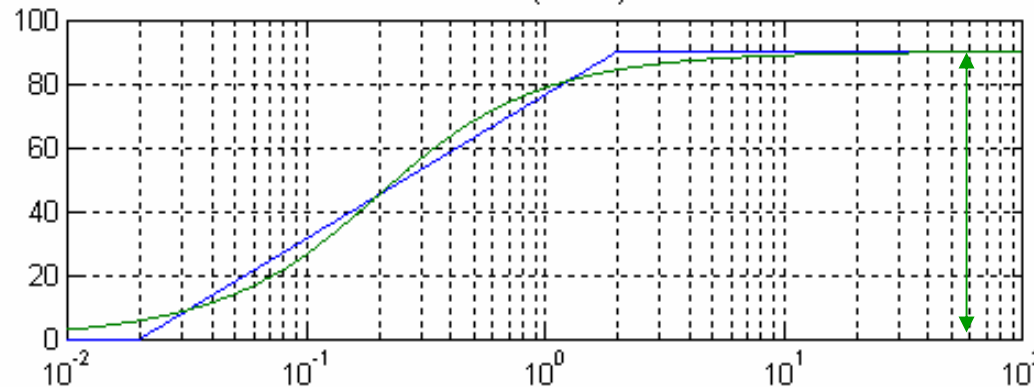
... pero no es realizable

$$C(s) = K(Ts + 1) \quad (K=1)$$



3

...y amplifica ruidos de alta frecuencia



Aporta hasta 90° de fase

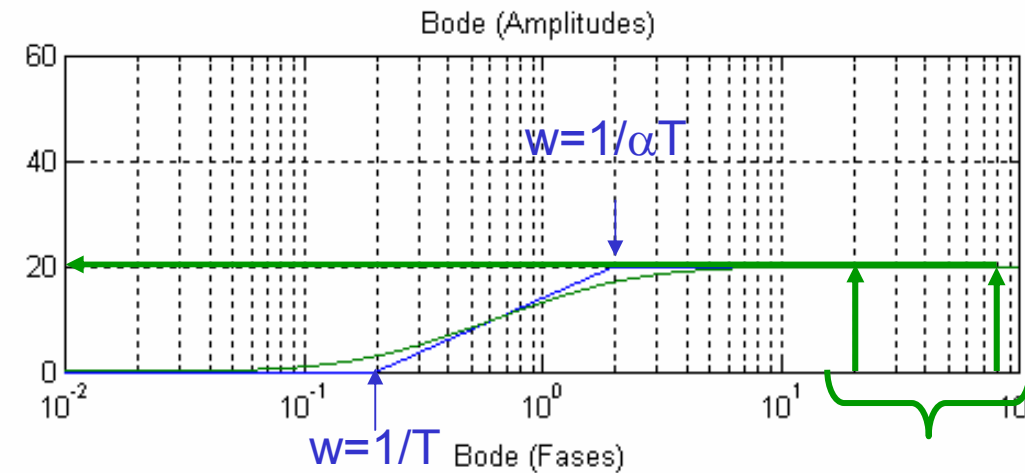
1

# Red de Adelanto de Fase

## Cero + Polo

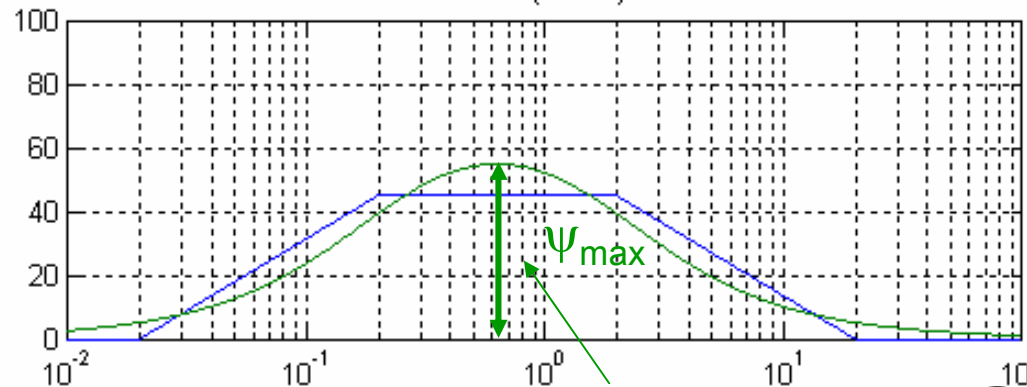
**2** ES realizable

$$C(s) = K \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \quad (K=1)$$



**3**

Mantiene acotados niveles de ruido HF

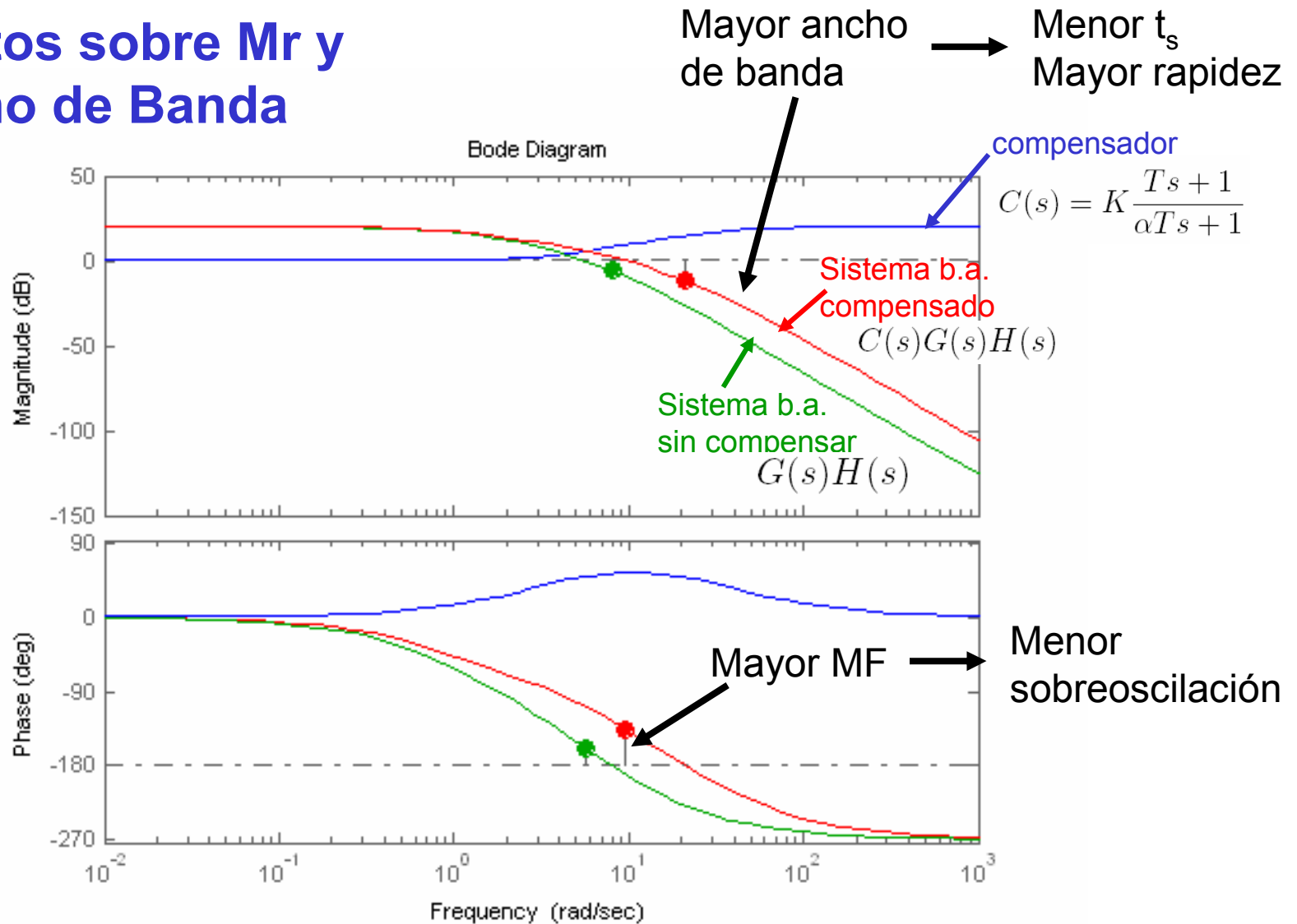


Aporta fase  
(menos de 90°)

**1**

# Red de Adelanto de Fase

## Efectos sobre $M_r$ y Ancho de Banda

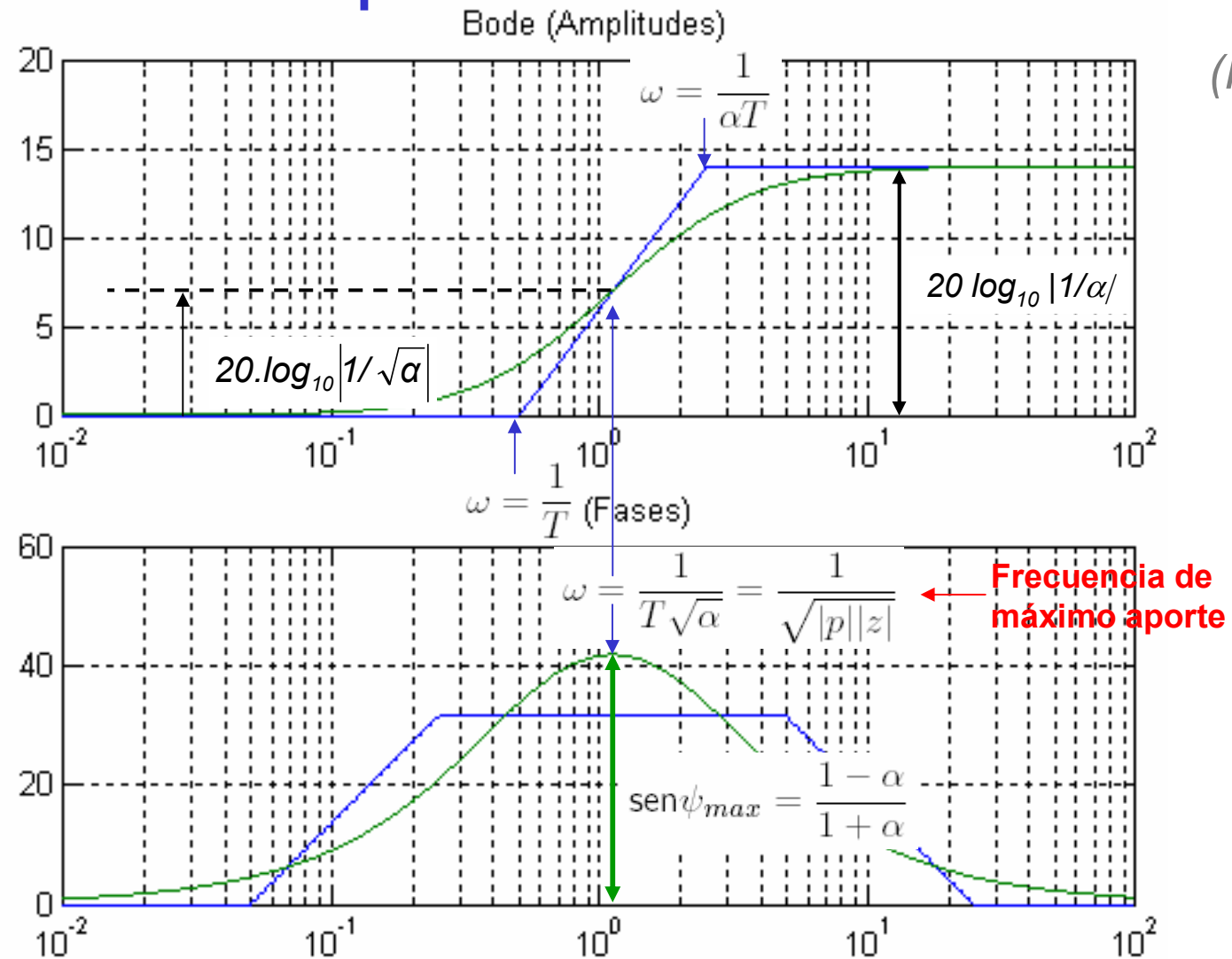


# Red de Adelanto de Fase

## Anatomía del Compensador

$$C(s) = K \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1}$$

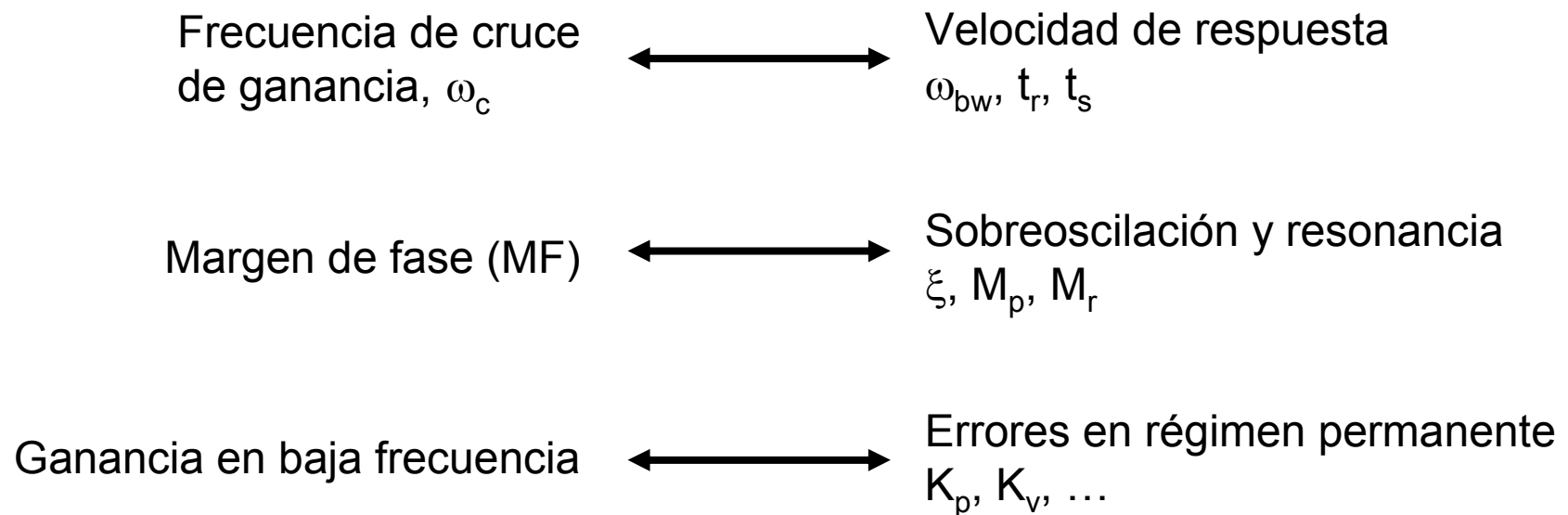
(K=1)





# Red de Adelanto de Fase

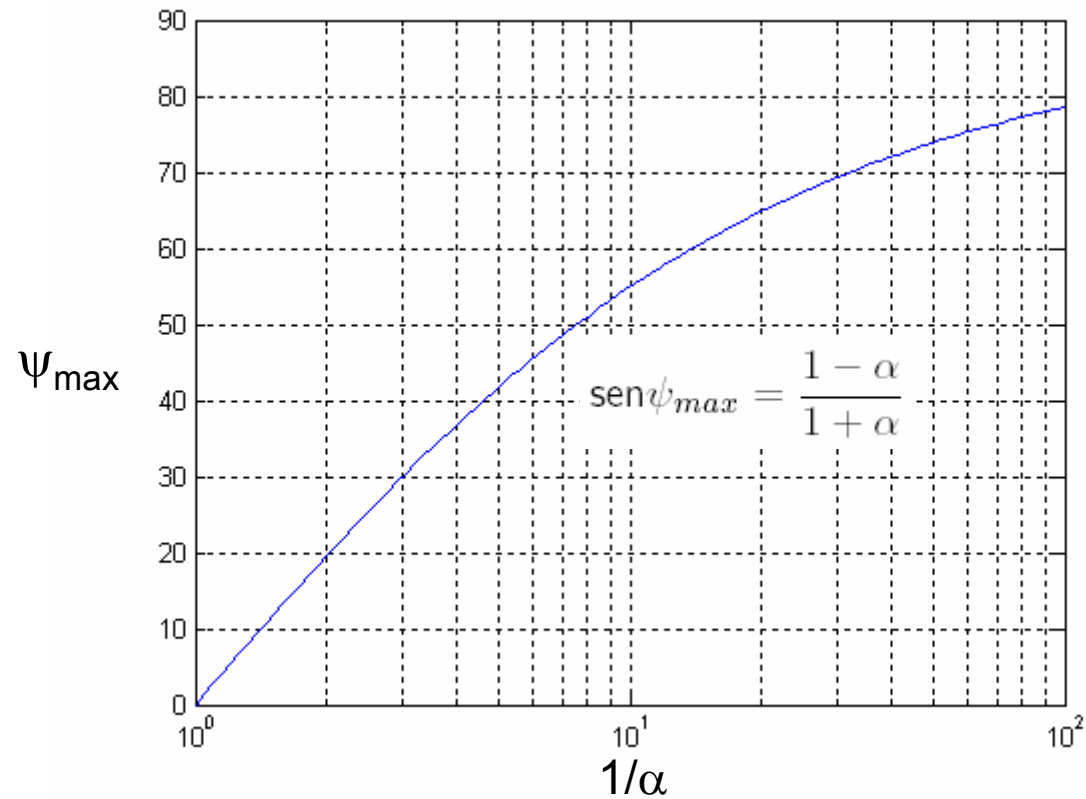
## Principales parámetros de diseño



# Red de Adelanto de Fase

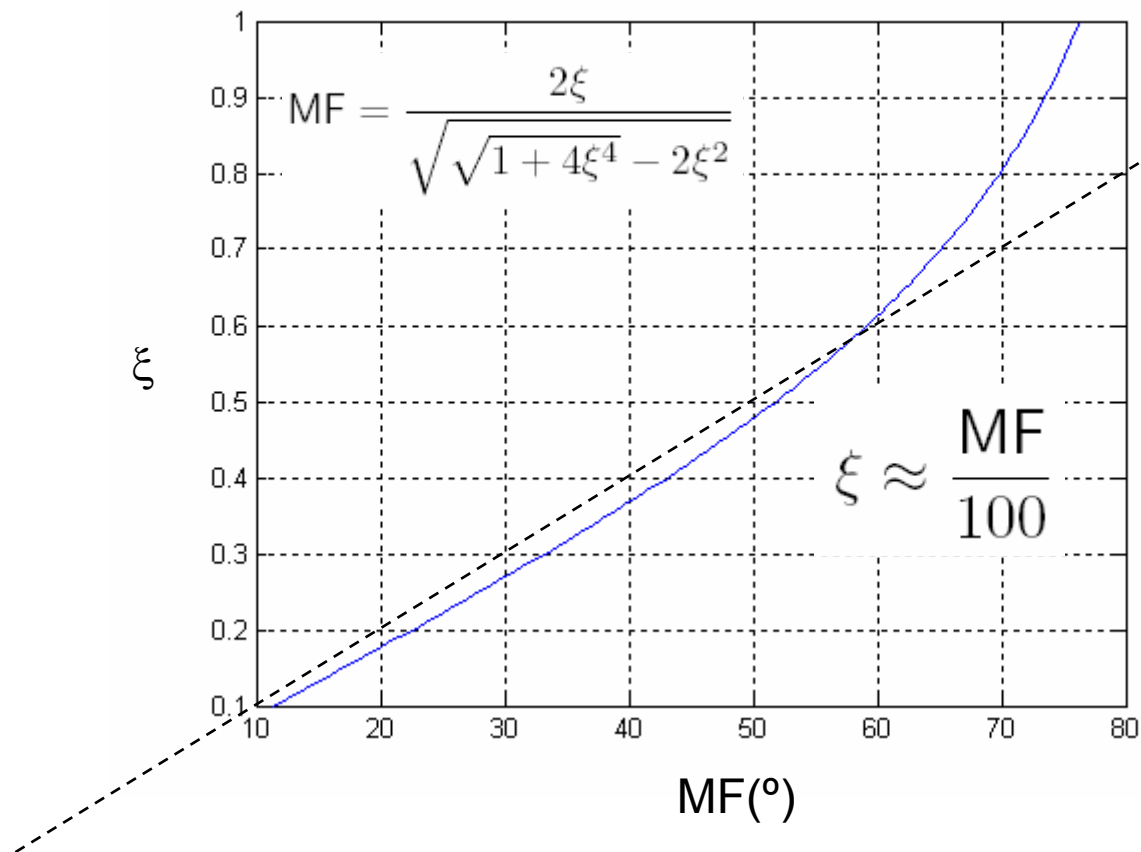
## Máximo aporte en función de $\alpha$

Máximo incremento de fase  
aportado por la compensación de adelanto



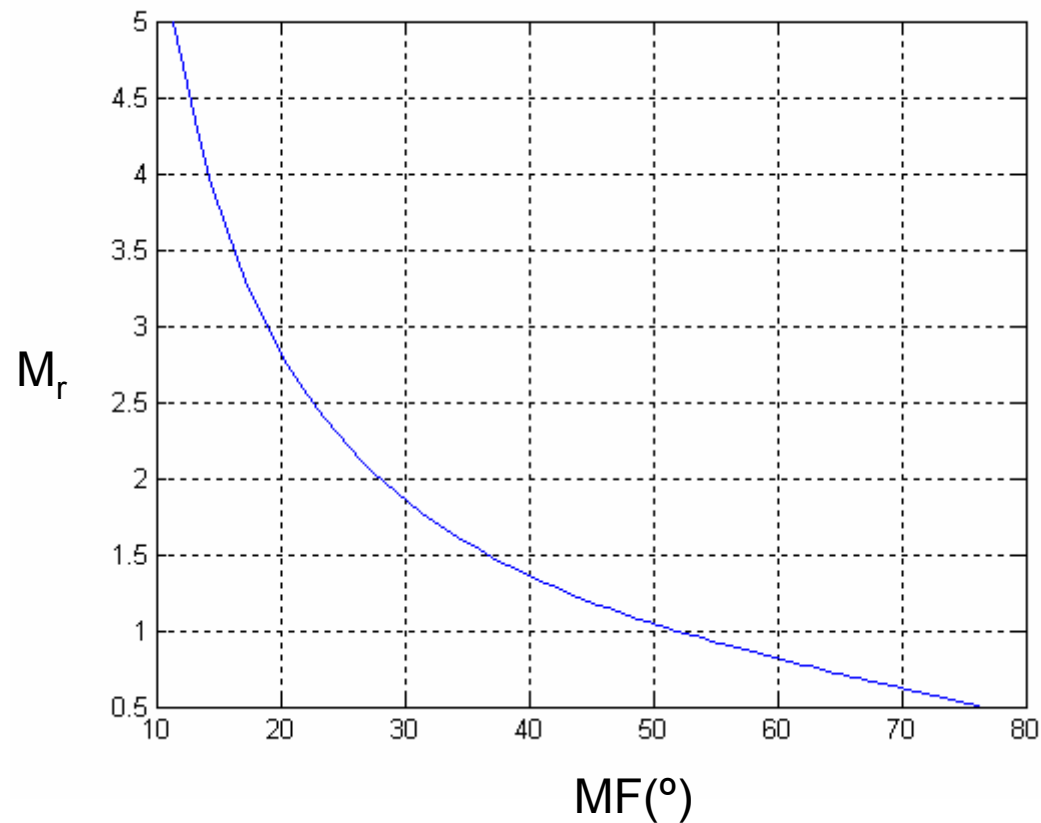
# Red de Adelanto de Fase

Relación entre MF y factor de amortiguamiento



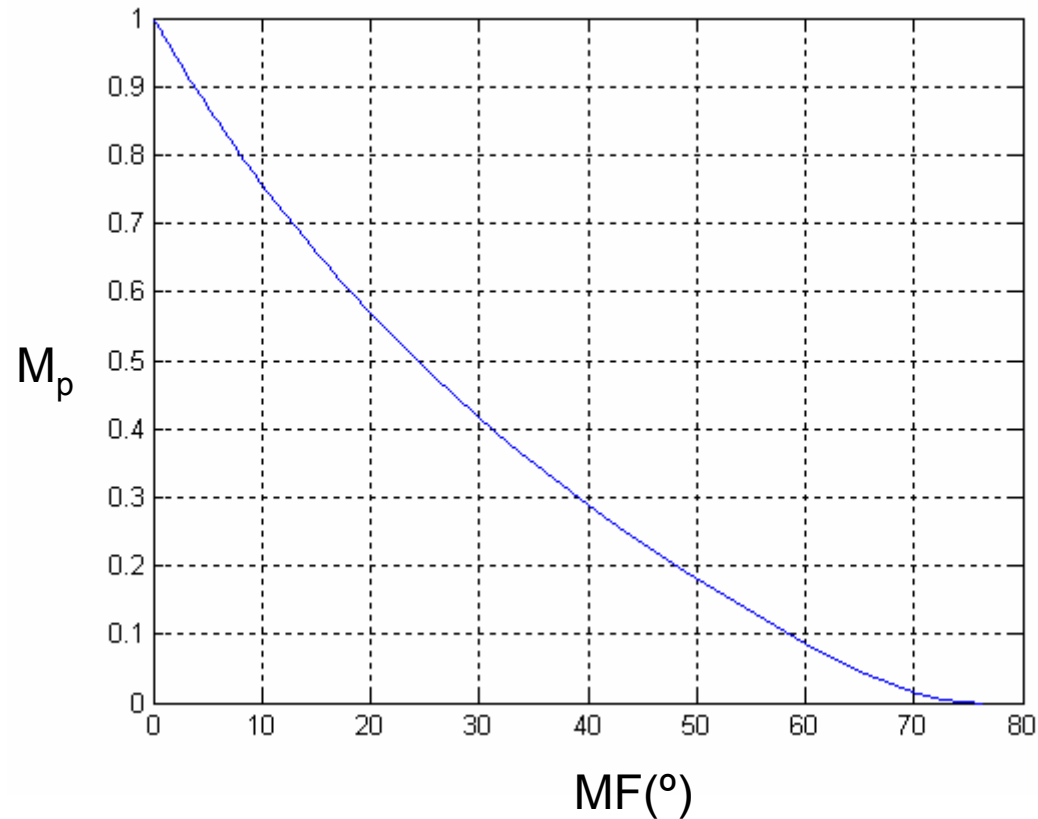
# Red de Adelanto de Fase

## Relación entre MF y resonancia



# Red de Adelanto de Fase

Relación entre MF y sobreoscilación  $M_p$



# Ejemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$e_v < 10\%$$

$$M_p < 25\%$$

Solución propuesta:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) \cdot G(s) \cdot H_0$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) \cdot G(s) H_0$$

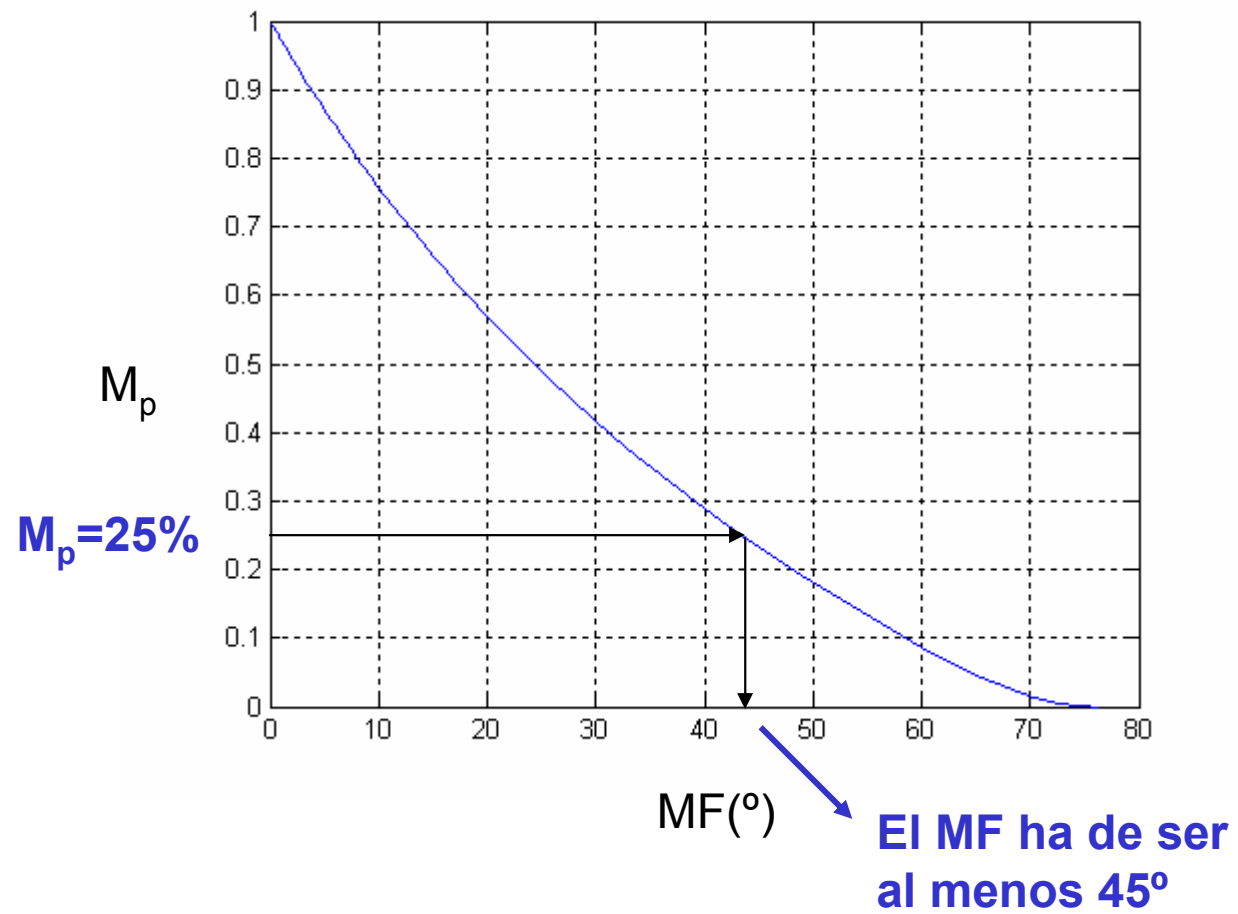
$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) \cdot \frac{1}{s(s+1)} \cdot 1$$

$$= C(0)$$

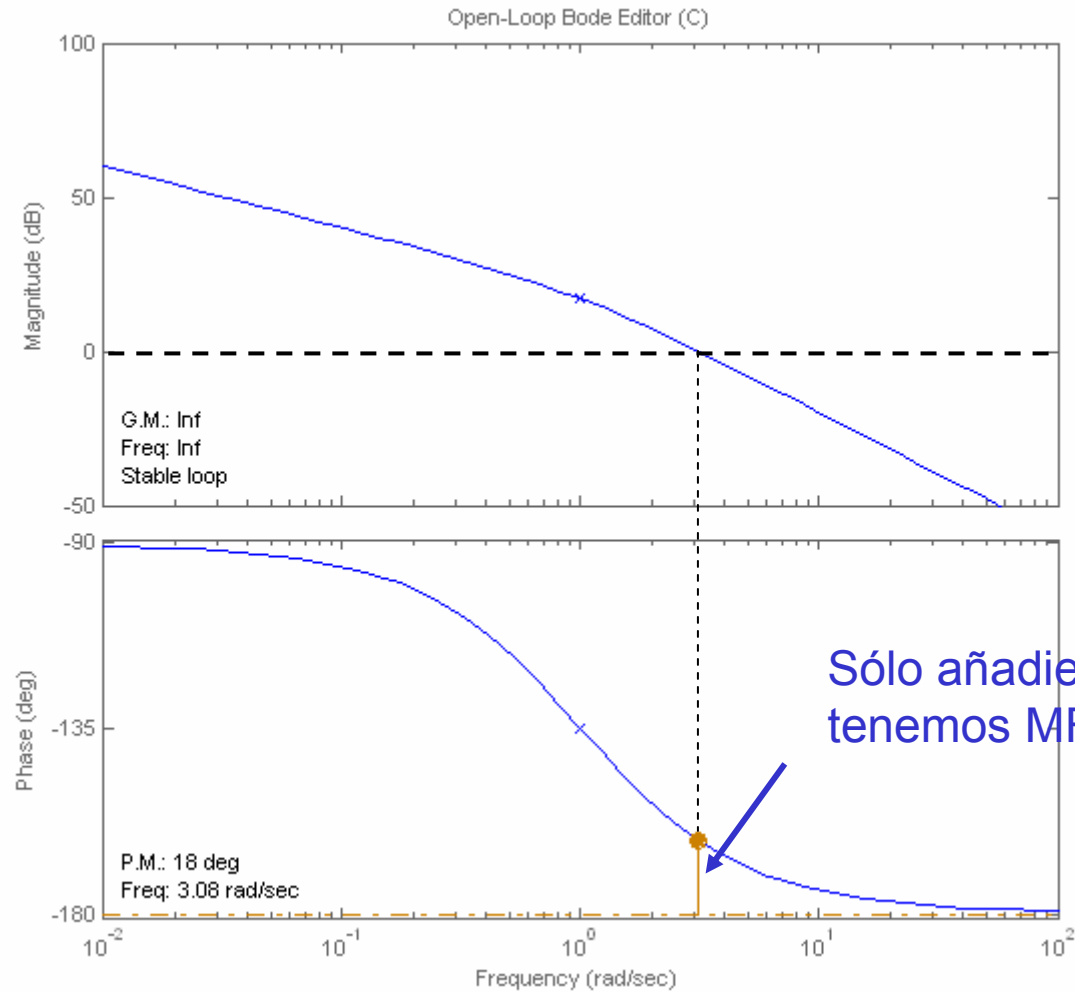
$$\xrightarrow{\quad} e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{C(0)} \leq 0.10 \longrightarrow C(0) \geq 10$$

La ganancia del  
regulador ha de  
ser al menos 10

# Ejemplo



# Ejemplo



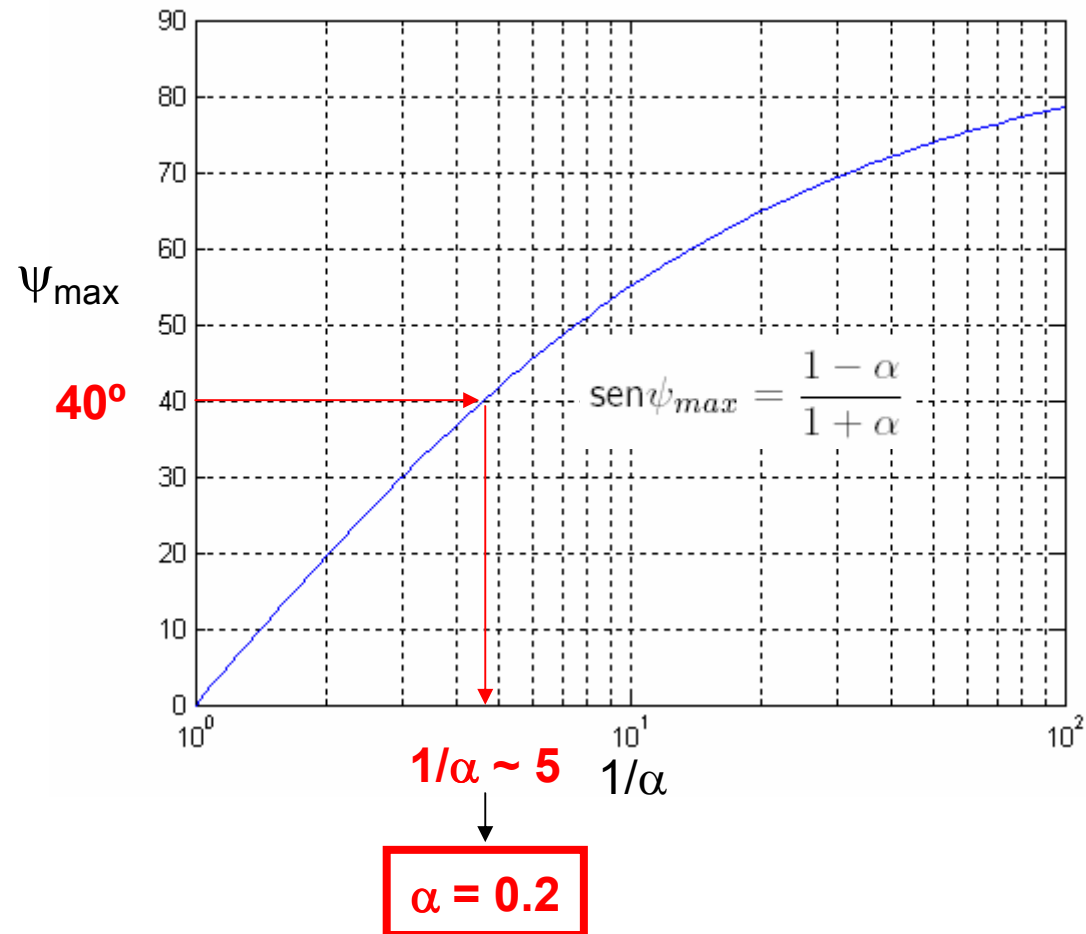
Sólo añadiendo K,  
tenemos MF~20°

**Necesitamos  
otros 25°...  
Ponemos 40°  
por seguridad**

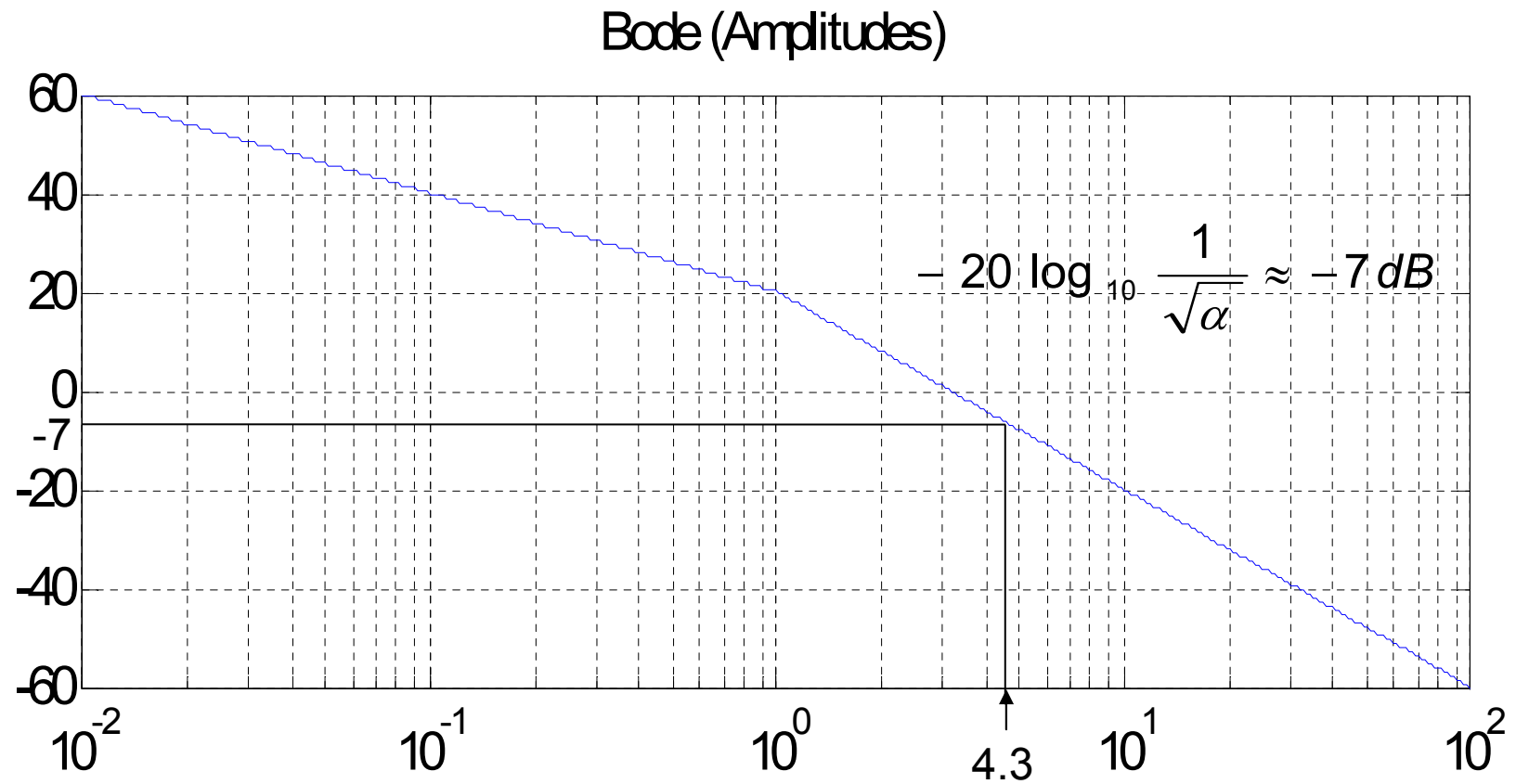


# Ejemplo

Máximo incremento de fase  
aportado por la compensación de adelanto



## Ejemplo. Colocación de la red.



## Ejemplo. Controlador

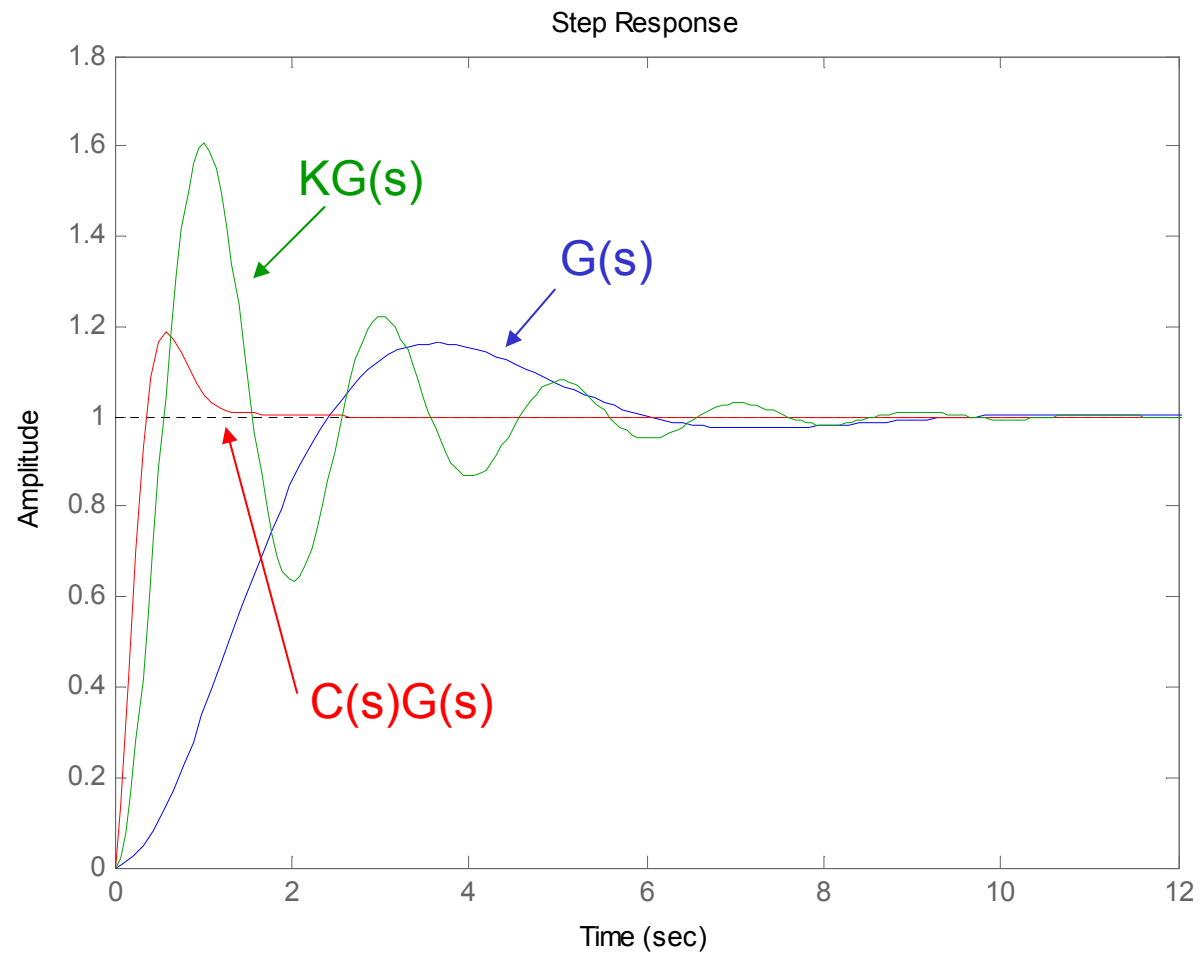
$$c = \frac{1}{T} = \omega_{cg} \sqrt{\alpha} = 1.923 \quad p = \frac{1}{\alpha T} = 9.61$$

$$C(s) = 50 \frac{s + 1.92}{s + 9.61} = 10 \frac{1}{0.2} \frac{s + \frac{1}{0.521}}{s + \frac{1}{0.2 \cdot 0.521}} = 10 \frac{0.521s + 1}{0.2 \cdot 0.521s + 1}$$



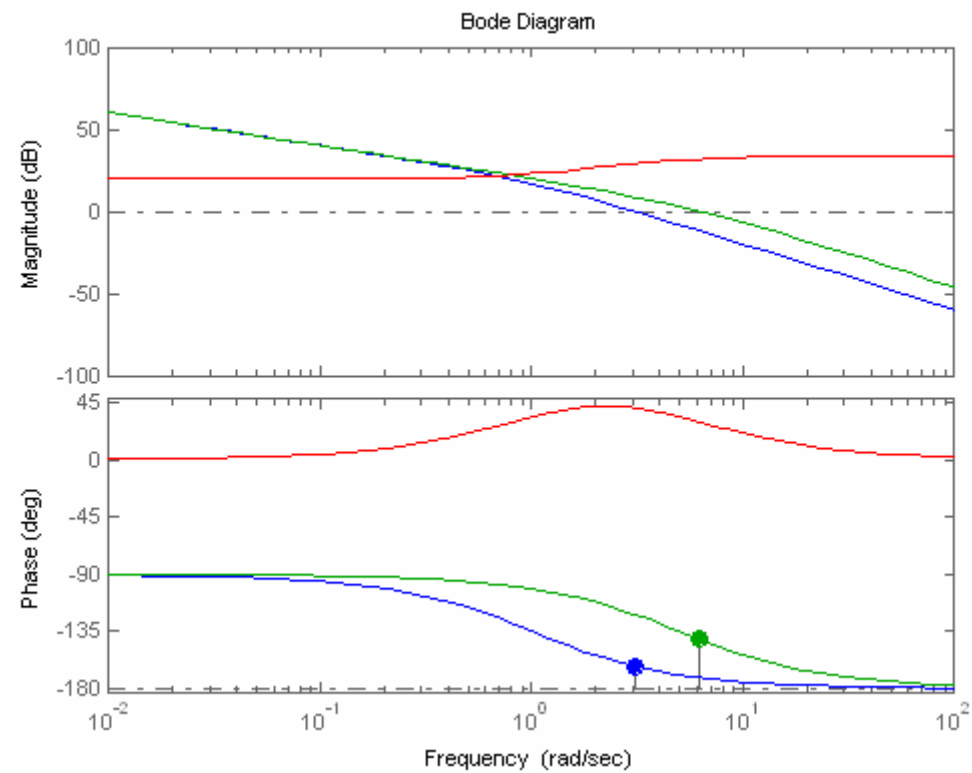
$$C(s) \approx 10 \frac{0.5s + 1}{0.1s + 1}$$

# Ejemplo. Respuesta ante escalón



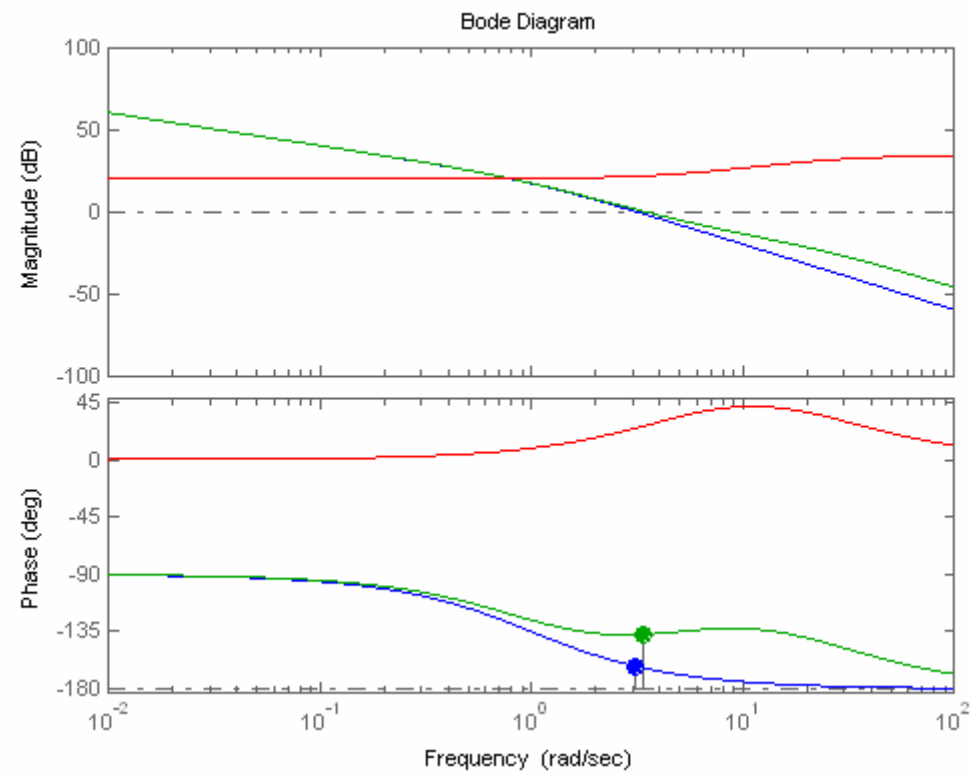
# Ejemplo

$K=10$ ;  $a = 0.2$ ;  $T=1$ ;



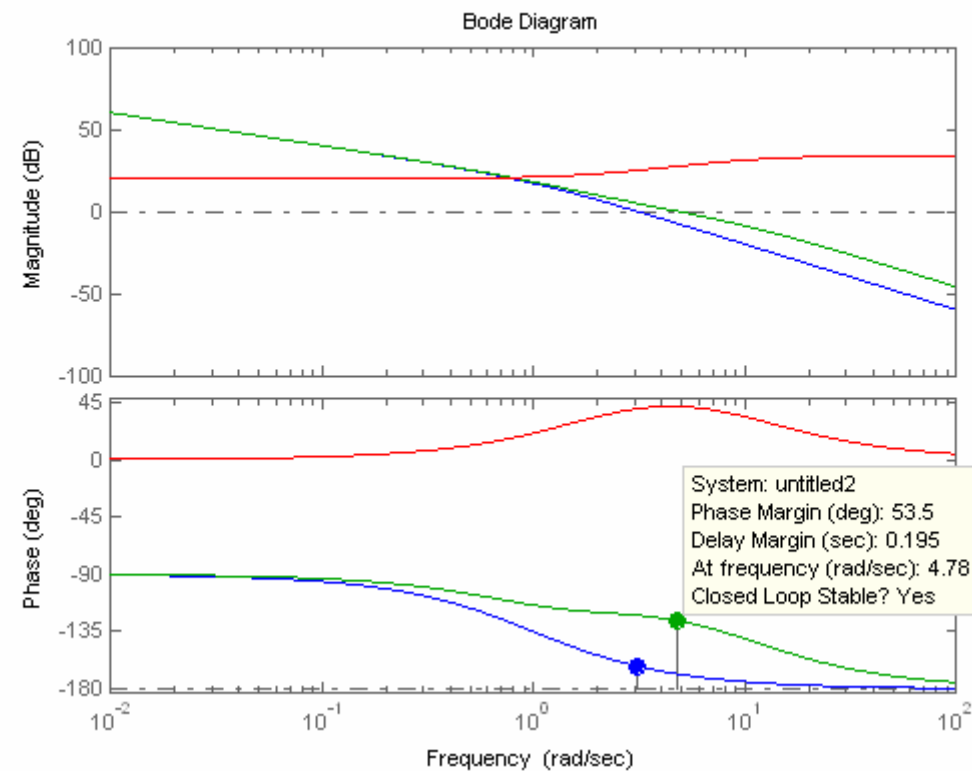
# Ejemplo

$K=10$ ;  $a = 0.2$ ;  $T=.2$ ;



# Ejemplo

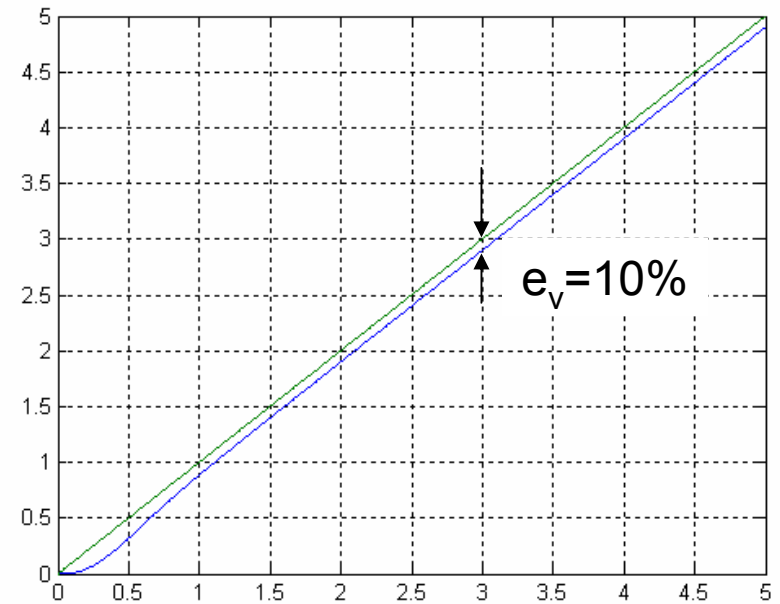
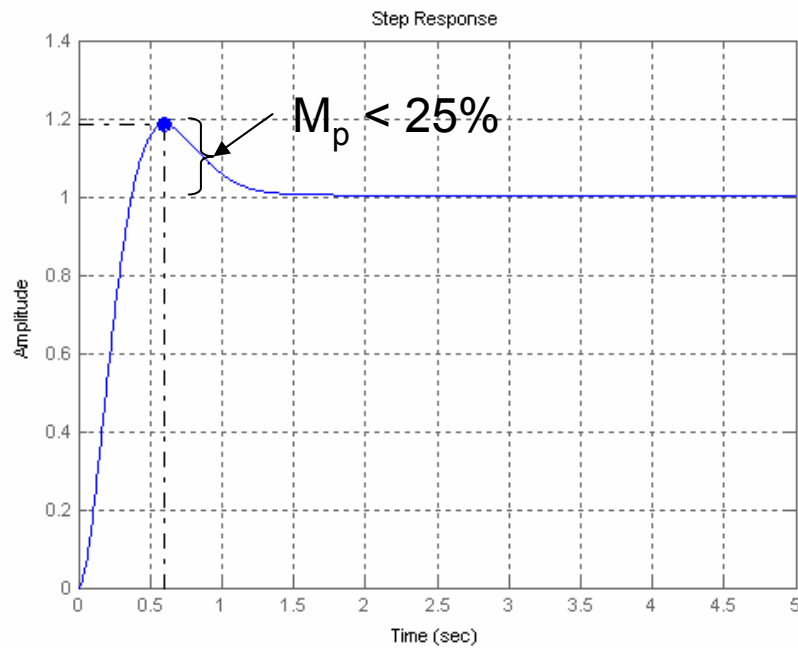
$K=10$ ;  $a = 0.2$ ;  $T=.5$ ;



**Controlador final:**  $C(s) = 10 \cdot \frac{0.5s + 1}{0.1s + 1}$

# Ejemplo

## Simulación de la respuesta





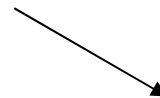
# Ejemplo

## Consideraciones finales

- Valores mayores de  $\alpha$  permiten añadir más ángulo, pero producen acciones PD más puras que pueden incrementar el ruido....
- Si necesitamos aportar más de  $60^\circ$  podemos utilizar una doble compensación de adelanto:

$$C(s) = K \left( \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \right)^2$$

- Si nos piden alguna especificación relacionada con la *velocidad de respuesta* debemos ajustar el ancho de banda del sistema final a través de la  $w_c$



Puede incrementarse  
jugando con la K

# Red de Adelanto de Fase

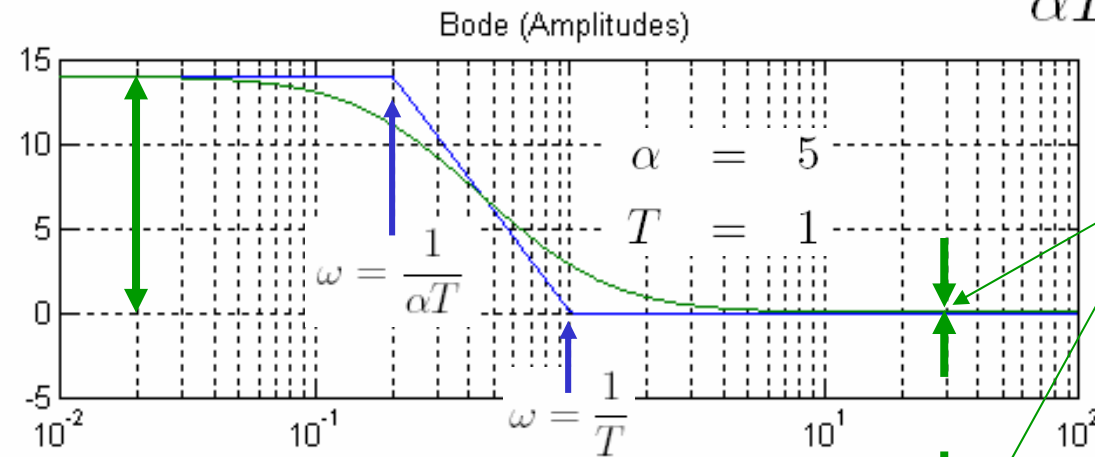
## Procedimiento de diseño

1. Determinar la ganancia en bucle abierto  $K$ , necesaria para satisfacer requisitos de reg. permanente
2. Determinar la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_c$  con un factor de seguridad de 2 por debajo del ancho de banda deseado
3. Evaluar el MF necesario aportar al sistema sin compensar,  $K_G$ . Añadir de  $5^\circ$  a  $12^\circ$  extra por seguridad.
4. Determinar  $\alpha$
5. Determinar  $T$  de prueba (trae cuenta elegir como frecuencia central de la red, el punto donde la curva de módulos cae  $20 \cdot \log_{10} |1/\sqrt{\alpha}|$ )
6. Dibujar la respuesta del sistema sin compensar  $K_G(j\omega)$ , y la del sistema compensado  $C(j\omega)G(j\omega)$ . Comprobar el MF e iterar para otro valor de  $T$  si es necesario
7. Comprobar el diseño simulando la respuesta. Añadir otra compensación de adelanto si fuera necesario.

# Red de Retardo de Fase

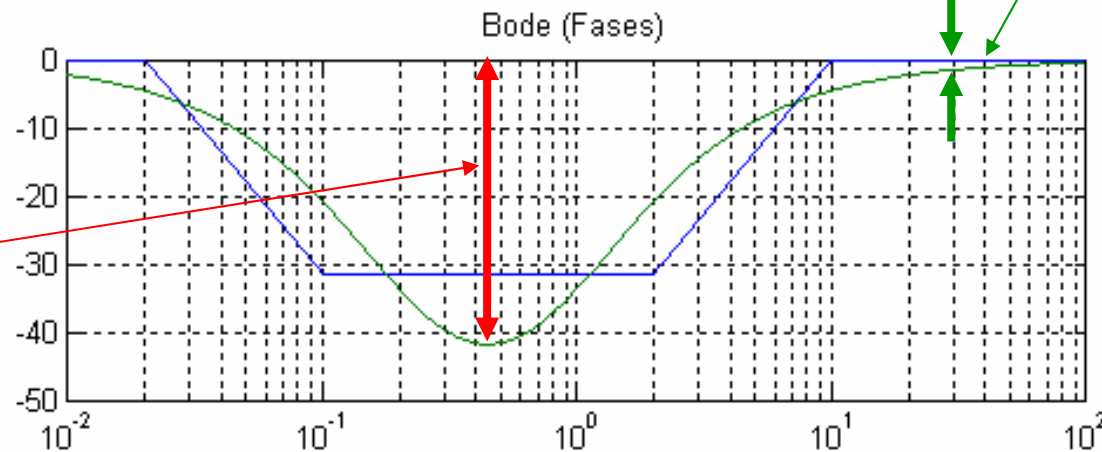
$$C(s) = \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

Produce un incremento de la ganancia en bajas frecuencias



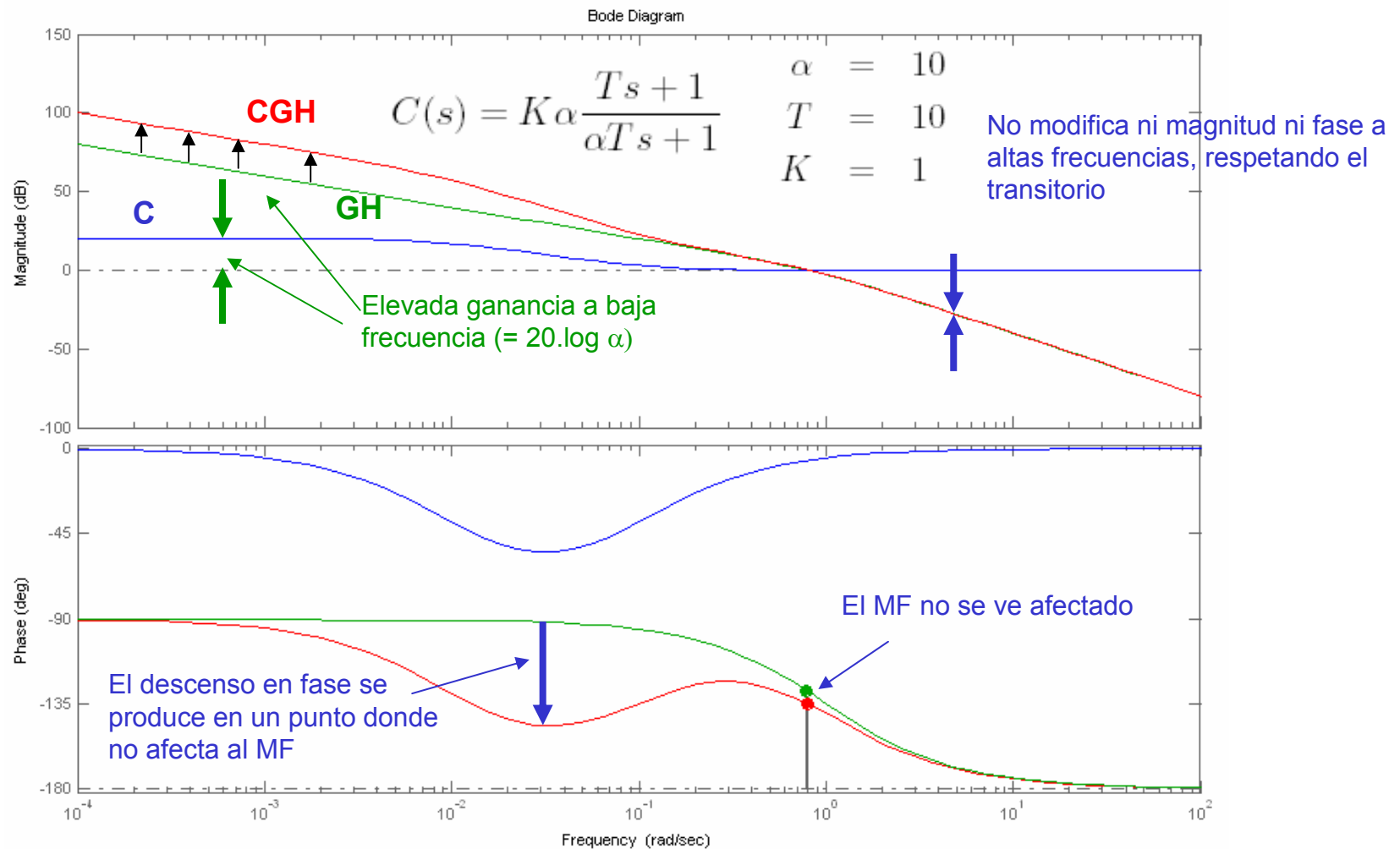
...sin afectar a la respuesta del sistema en altas frecuencias

Produce una merma en la fase que tiende a disminuir el MF



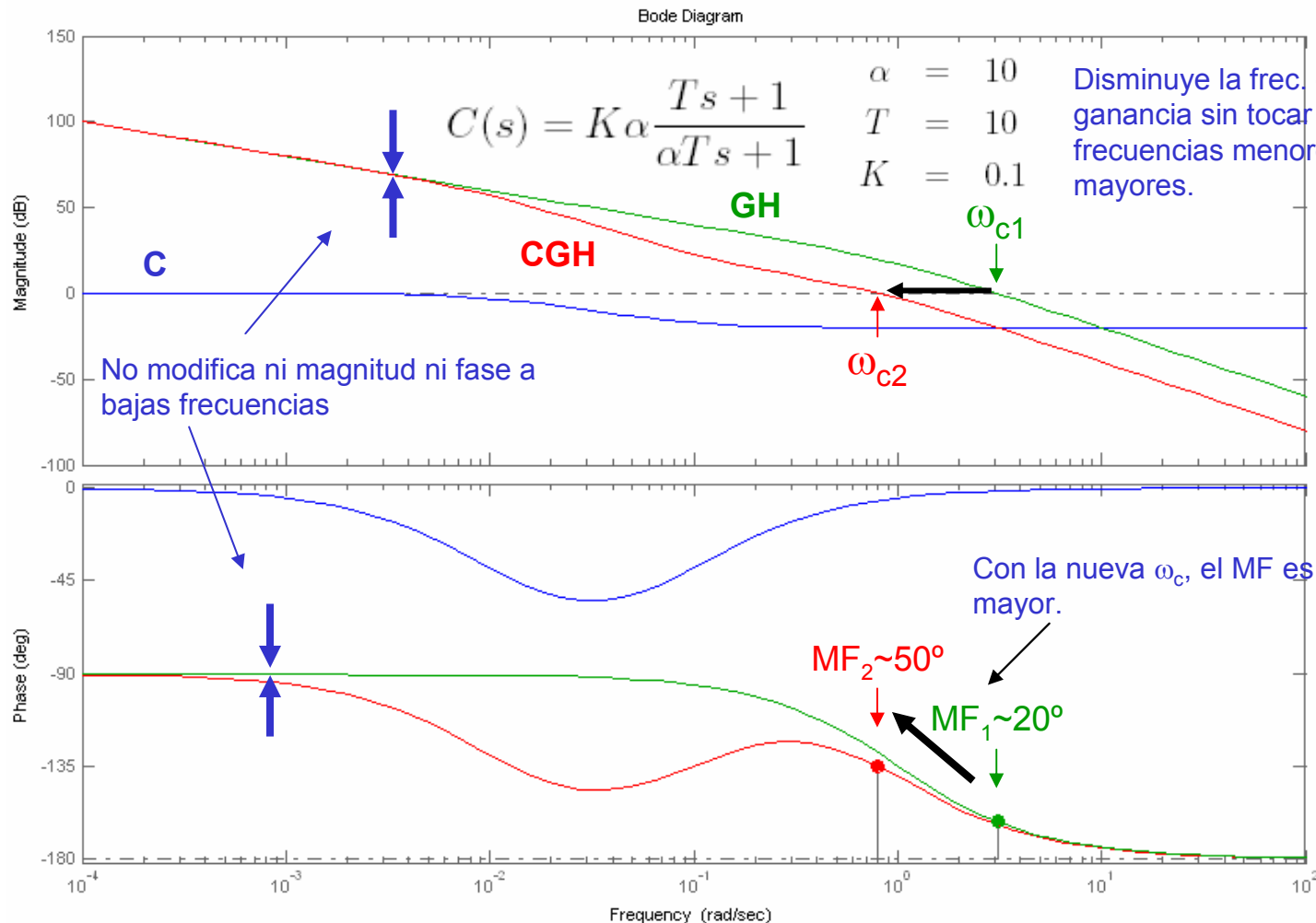
# Red de Retardo de Fase

## Incrementando ganancia a bajas frecuencias



# Red de Retardo de Fase

Incrementando MF a base de disminuir  $\omega_c$



## Ejemplo

$$G(s) = \frac{9}{(2s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)}$$

Diseñar un compensador para:

$$MF = 25$$

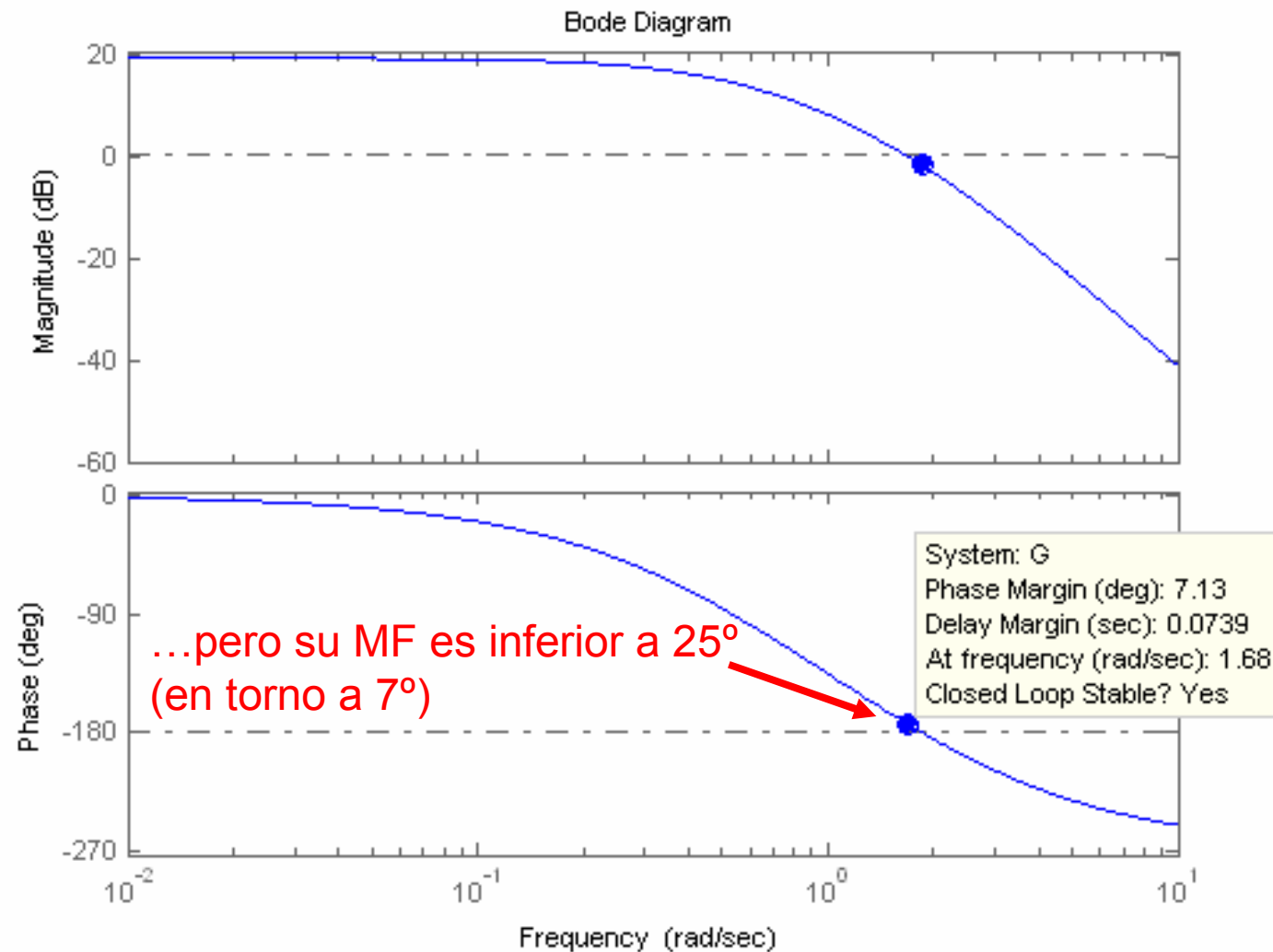
$$K_p \geq 9$$

Vemos que la  $K_p$  del sistema que nos dan es 9...



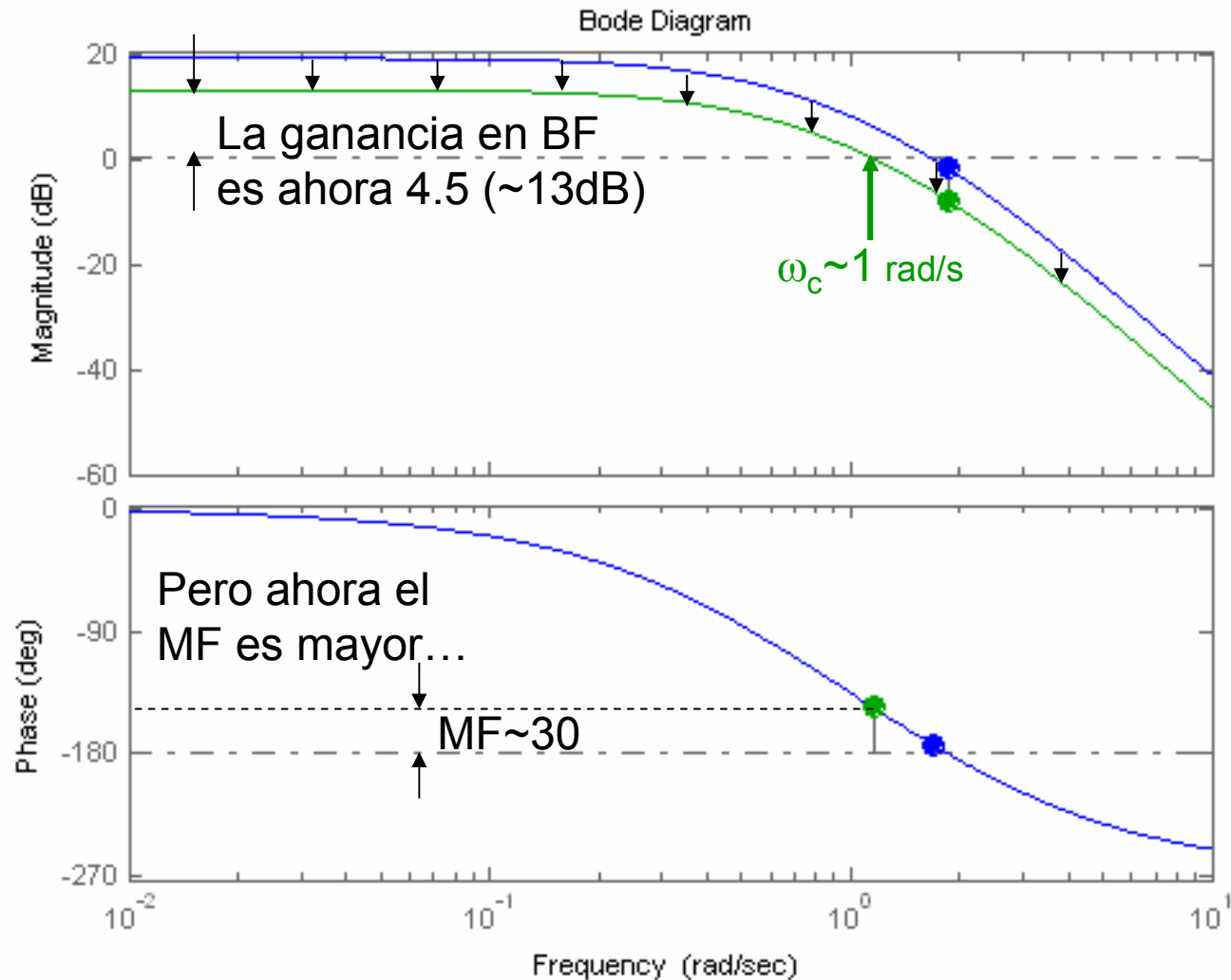
# Ejemplo

## Bode del sistema sin compensar



# Ejemplo

Disminuyendo la  $K$ , aumentamos MF hasta  $\sim 30^\circ$





Ya tenemos el MF deseado, pero necesitamos restaurar de nuevo la ganancia  $K_p=9$ ... hay que multiplicar por 2 la ganancia en bajas

debemos hacerlo  
sin tocar el MF

Elegimos  $\alpha=2$

La T la elegimos de forma que el codo superior esté  
entre una octava (dividir por dos) y una década (dividir por 10)  
por debajo de la nueva frecuencia de cruce  $\omega_c$

... por ejemplo,  
lo intentamos con  $1/5$  de  $\omega_c$

$$\omega_c \sim 1$$

$$\longrightarrow 1/T = 1/5$$

$$\longrightarrow T=5$$

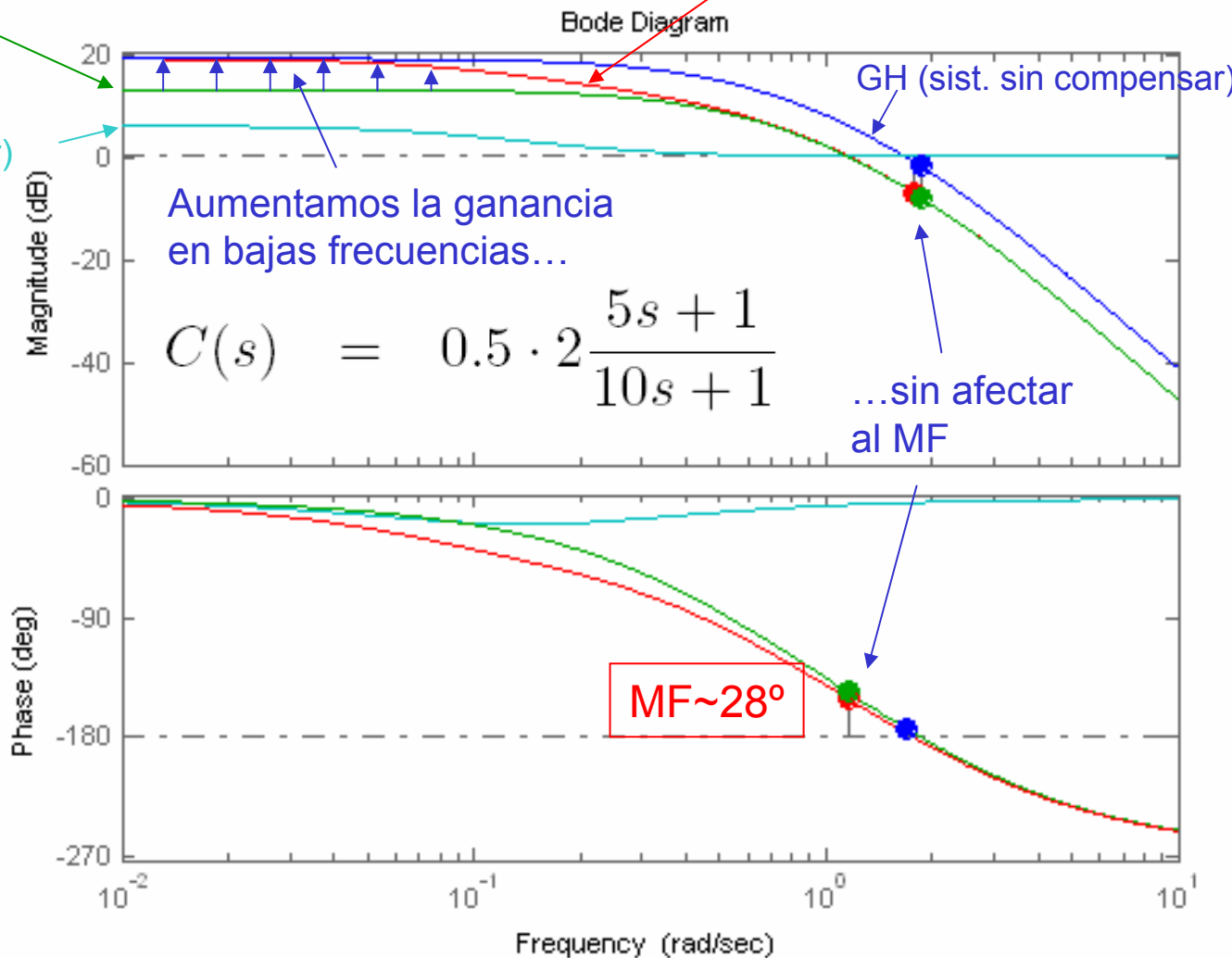
# Ejemplo

## Aplicando la red de Retraso

KGH (sist. con  
compensado  
proporcional)

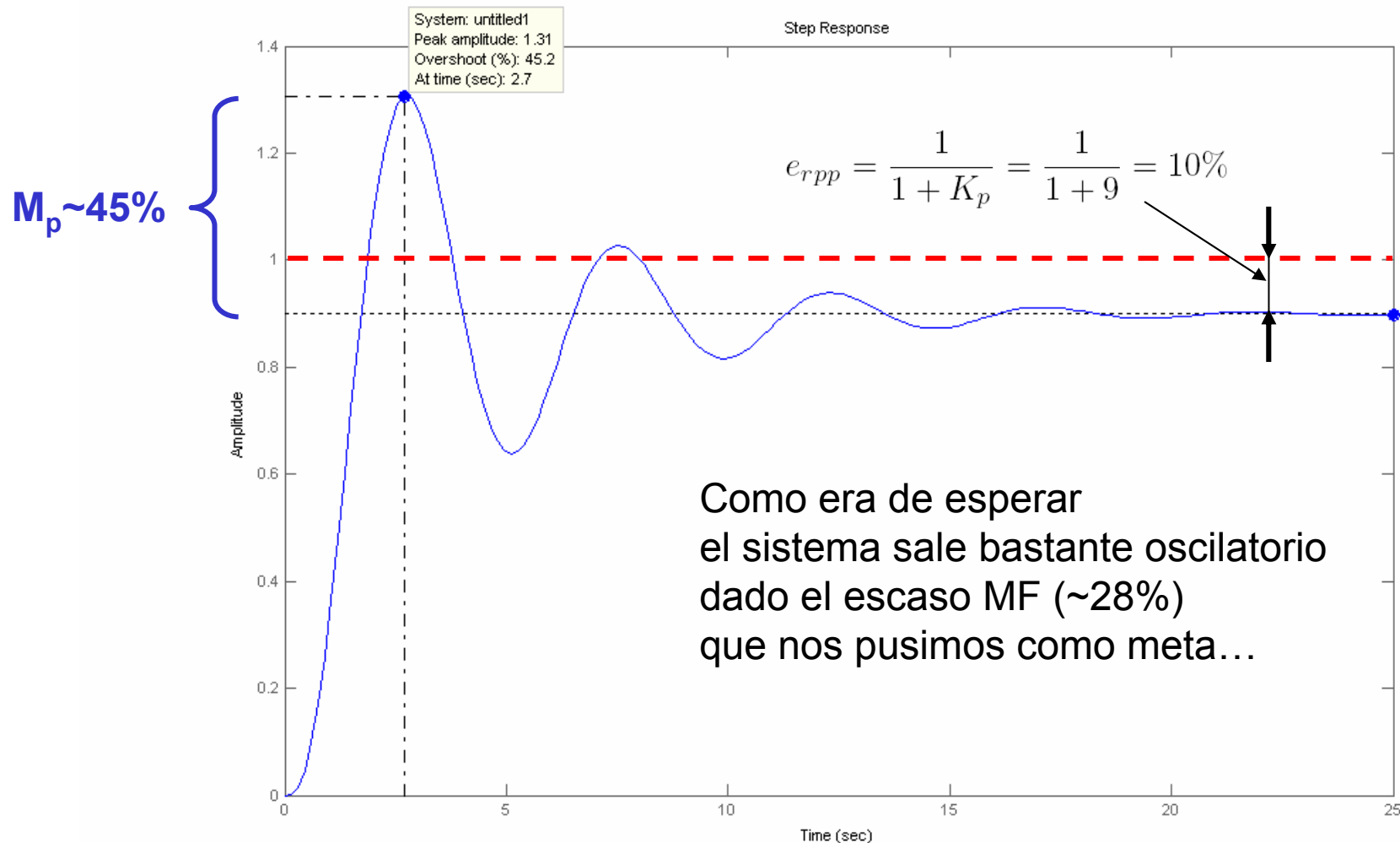
C (Compensador)

CGH (sist. compensado)



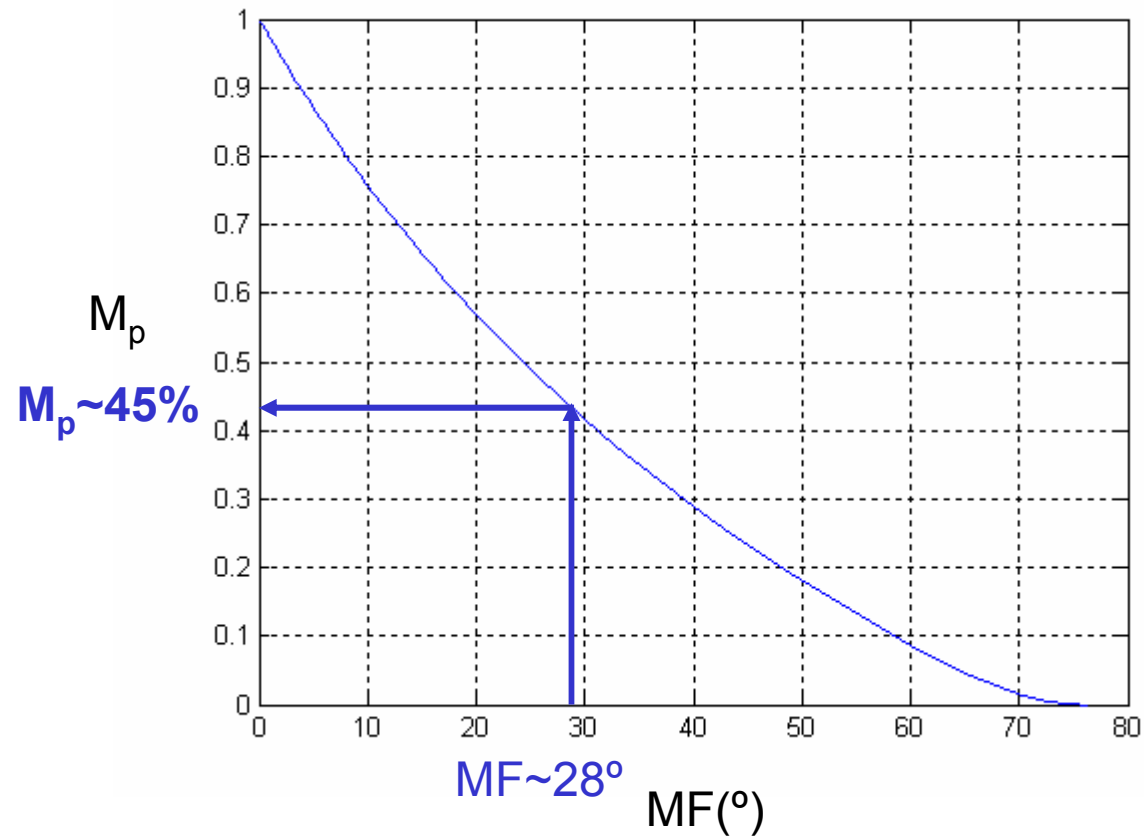
# Ejemplo

## Simulación ante un escalón



# Ejemplo

Calculamos la sobreoscilación que tendrá el sistema



# Red de Retardo de Fase

## Procedimiento de diseño

1. Determinar la ganancia en bucle abierto  $K$ , necesaria para satisfacer el MF sin emplear otra compensación
2. Dibujar el Bode del sistema con la compensación proporcional anterior (KGH) y evaluar la ganancia en baja frecuencia y la nueva  $\omega_c$
3. Determinar  $\alpha$  necesario para conseguir la ganancia en baja frecuencia requerida por las especificaciones de permanente
4. Determinar  $T$  de prueba eligiendo como frecuencia de corte superior  $\omega=1/T$  en torno a una octava ( $1/2$ ) o una década ( $1/10$ ) por debajo de la  $\omega_c$  determinada en el segundo punto
5. La frecuencia de corte inferior estará a  $\omega= 1/(\alpha T)$
6. Comprobar el diseño simulando la respuesta y retocando las elecciones de puntos anteriores si es preciso.

# Compensación PID

Forma Básicas:

$$C(s) = \frac{K}{s} \left[ (T_D s + 1) \left( s + \frac{1}{T_I} \right) \right]$$

$$C(s) = K \frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1} \beta \frac{T_i s + 1}{\beta T_i s + 1}$$

# Compensación PID

## Procedimiento de diseño

- Diseñar las dos partes secuencialmente
- Diseñar las dos partes en conjunto  
Parámetros a diseñar ( $\alpha$ ,  $T_d$ ,  $\beta$ ,  $T_i$ ,  $K$ )

### ∃ Procedimientos Específicos

Diseño conjunto:

Cfr. [Puentes91], [Blasco00],[Franklin94]

Método empíricos:

Cfr. Metodo de Ziegler-Nichols [Ogata]

# Compensación PID

Ejemplo [cfr. Franklin, pp. 408 y ss]

$$G(s) = \frac{0.9}{s^2}$$

$$H(s) = \frac{2}{s + 2}$$

Diseñar PID para obtener:

$$e_{\text{rpp}} \sim 0$$

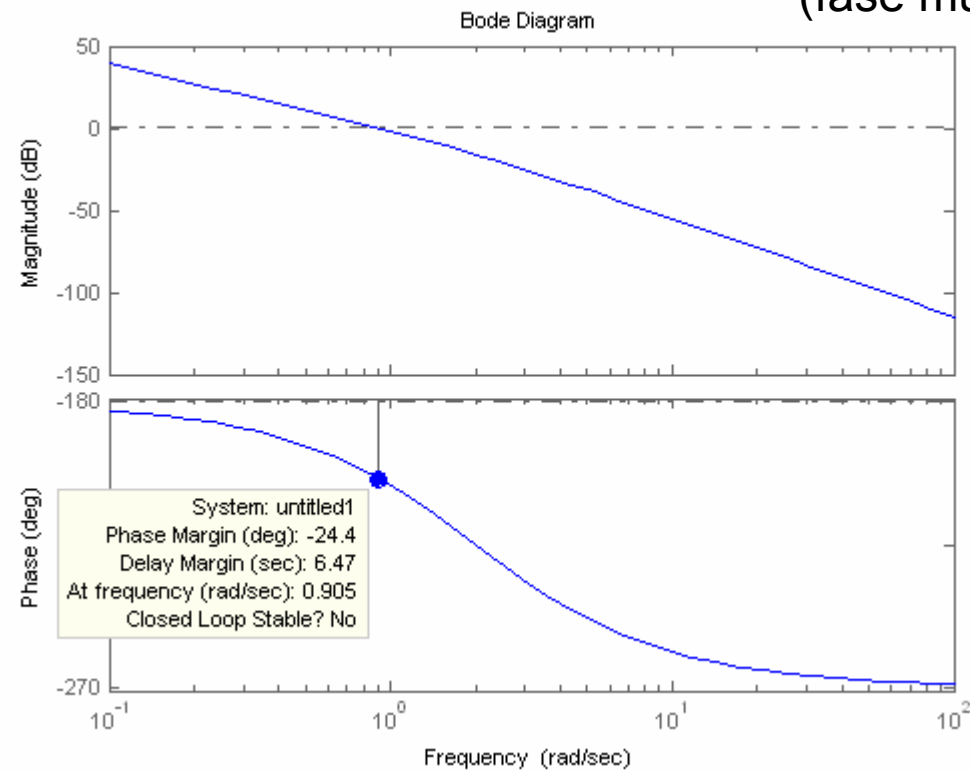
$$\text{MF} \sim 65^\circ$$



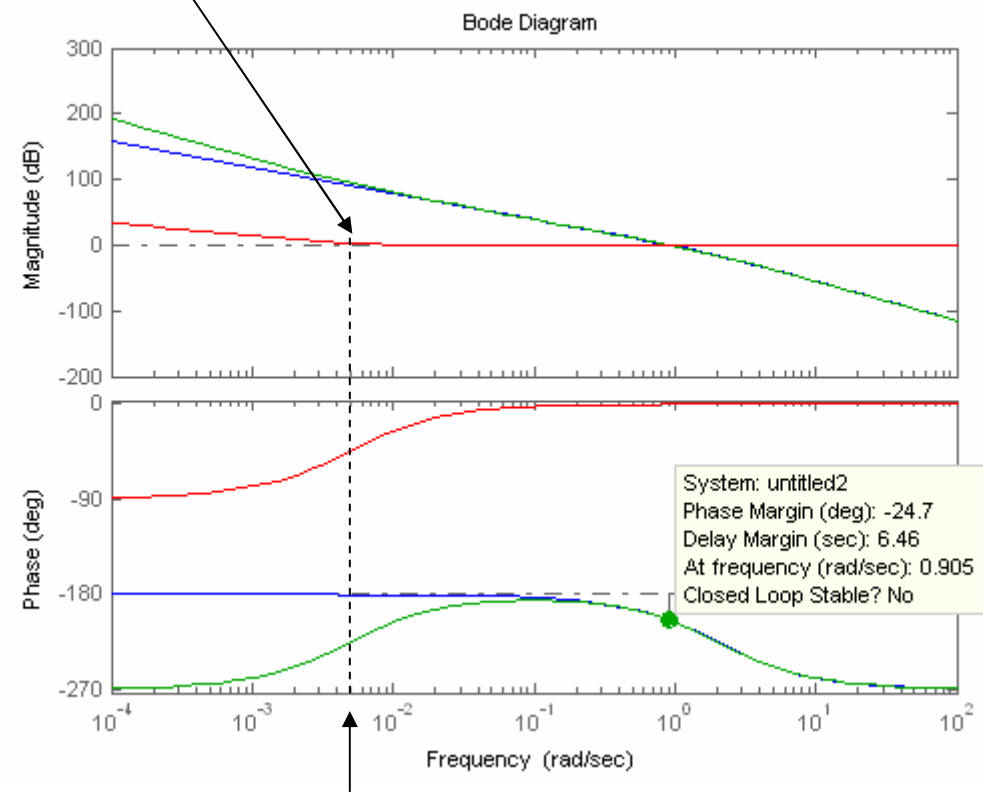
# Compensación PID

## Ejemplo

El sistema es altamente inestable al realimentar (fase muy negativa)

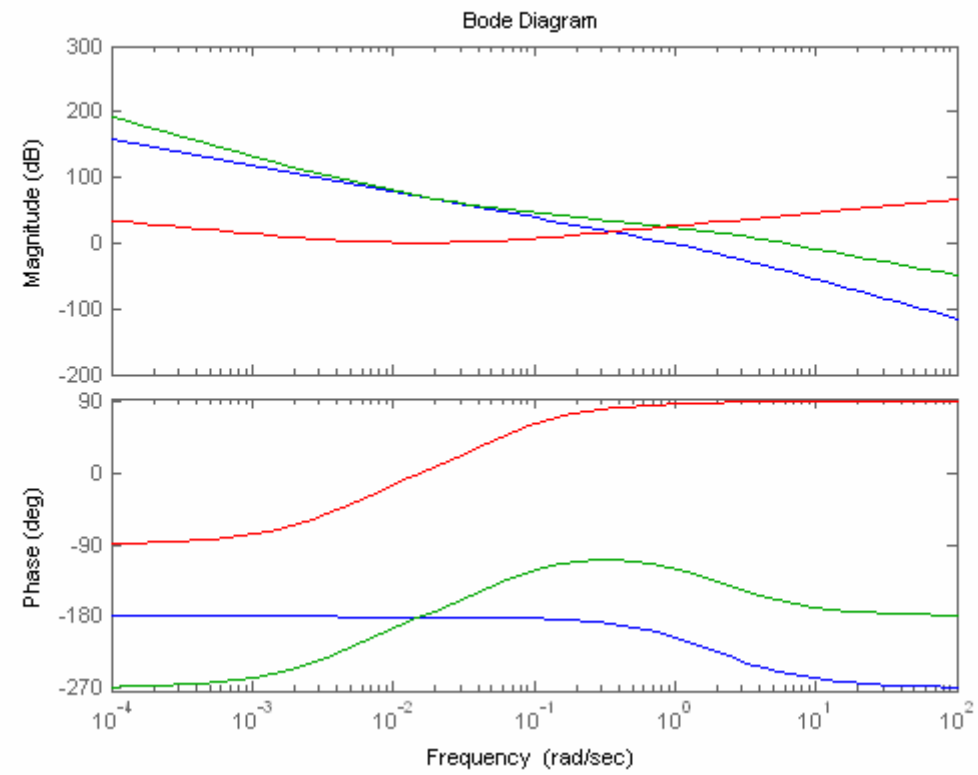


$T_d = 0, T_i = 200$

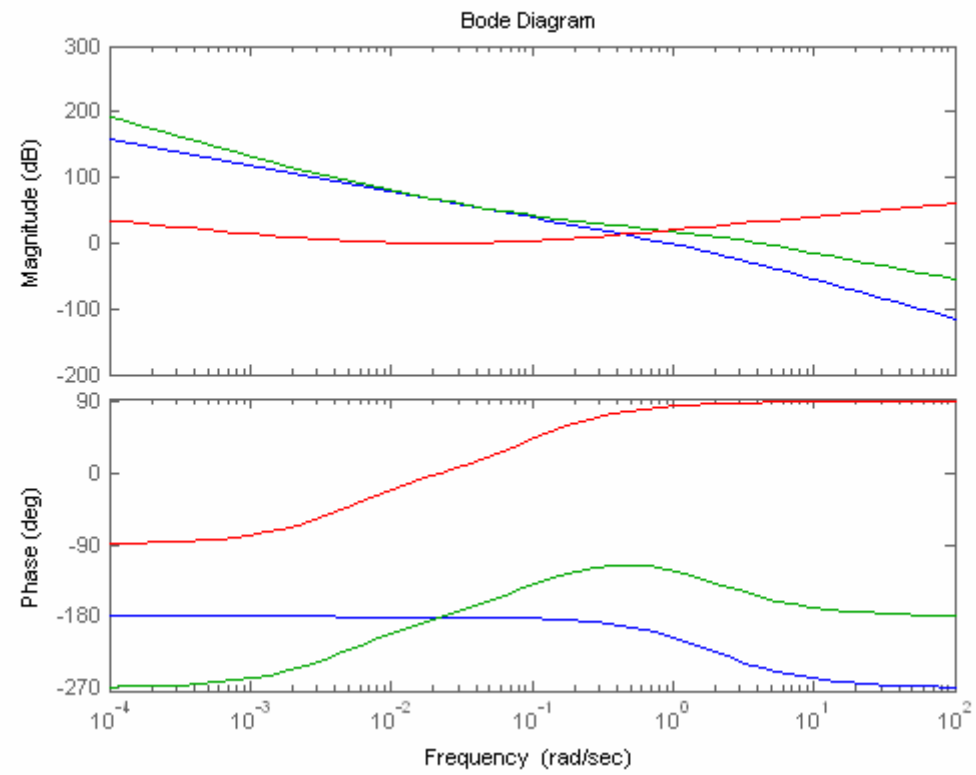


$$1/T_i = 0.005$$

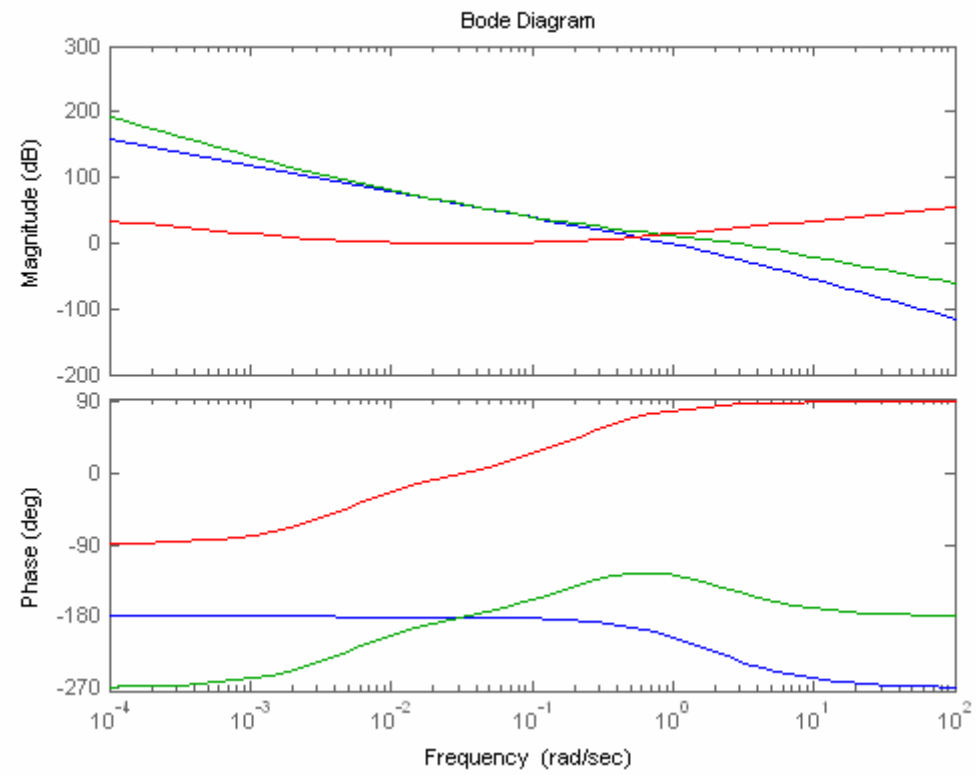
$T_d = 20$ ,  $T_i = 200$



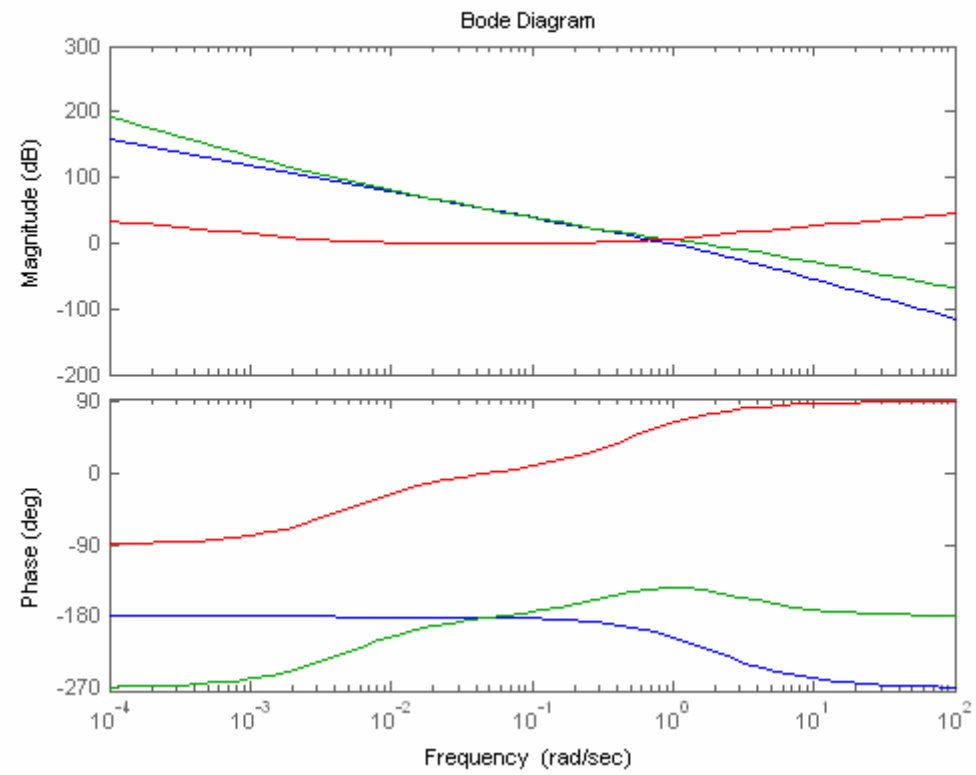
$T_d=10$ ,  $T_i=200$



$T_d=5$ ,  $T_i=200$



$T_d=2$ ,  $T_i=200$



$T_d=10$ ,  $T_i=200$

Hay que bajar la  
línea verde hasta el 0db  
sin tocar la fase

