



Realimentación

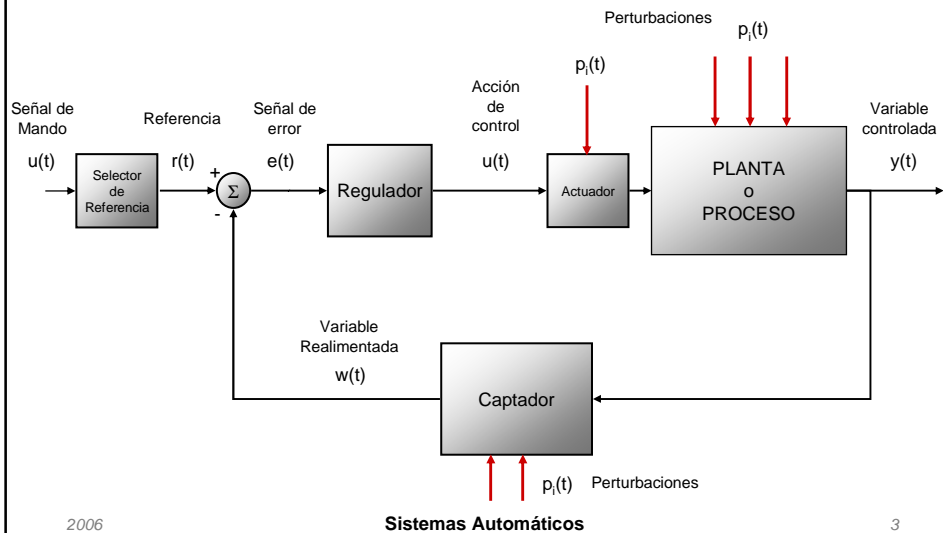
Tema 3



Índice

- Ventajas
- Inconvenientes
- El regulador todo-nada
- El regulador PID
- Funciones de Sensibilidad

Lazo típico de realimentación



2006

Sistemas Automáticos

3

Ventajas de la realimentación

- Rechazo de perturbaciones
- Seguimiento de referencias
- Sensibilidad a variaciones en parámetros
- Linealización
- Estabilización de sistemas inestables
- Variación de la respuesta dinámica

2006

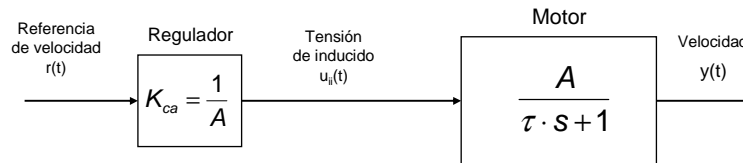
Sistemas Automáticos

4



Seguimiento de referencias (c.a.)

Control en cadena abierta



$$y_{\infty} = A \cdot u_{i_{\infty}} = A \cdot \frac{1}{A} r_{\infty} = r_{\infty}$$

$$r_{\infty} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \rightarrow \quad y_{\infty} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$L \approx 0$$

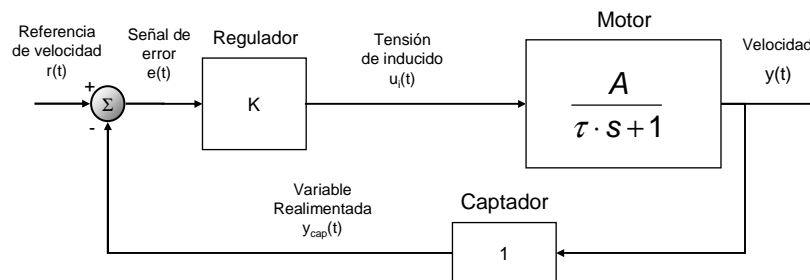
$$\tau = \frac{1}{60} \text{seg}$$

$$A = 10 \frac{\text{rad}}{\text{V} \cdot \text{s}}$$



Seguimiento de referencias (c.c.)

Control en cadena cerrada



$$y_{\infty} = \frac{AK}{1+AK} r_{\infty}$$

$$K = 10$$

$$y_{\infty} = \frac{10 \cdot 10}{1 + 10 \cdot 10} r_{\infty} = \frac{100}{101} r_{\infty}$$

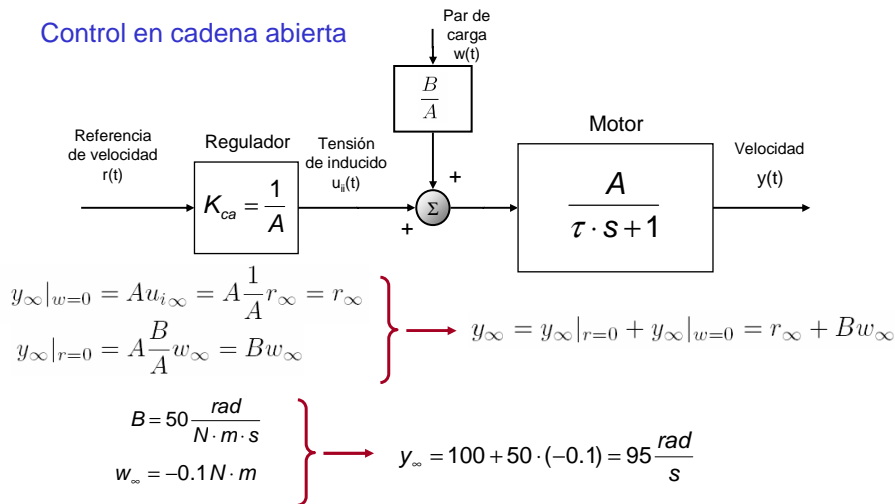
$$r_{\infty} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$y_{\infty} = 99.01 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Rechazo de perturbaciones (c.a.)

Control en cadena abierta



2006

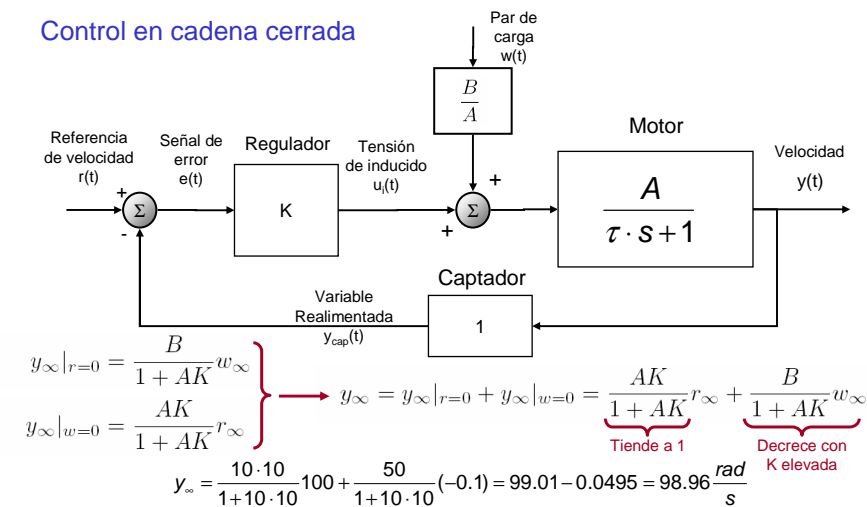
Sistemas Automáticos

7



Rechazo de perturbaciones (c.c.)

Control en cadena cerrada



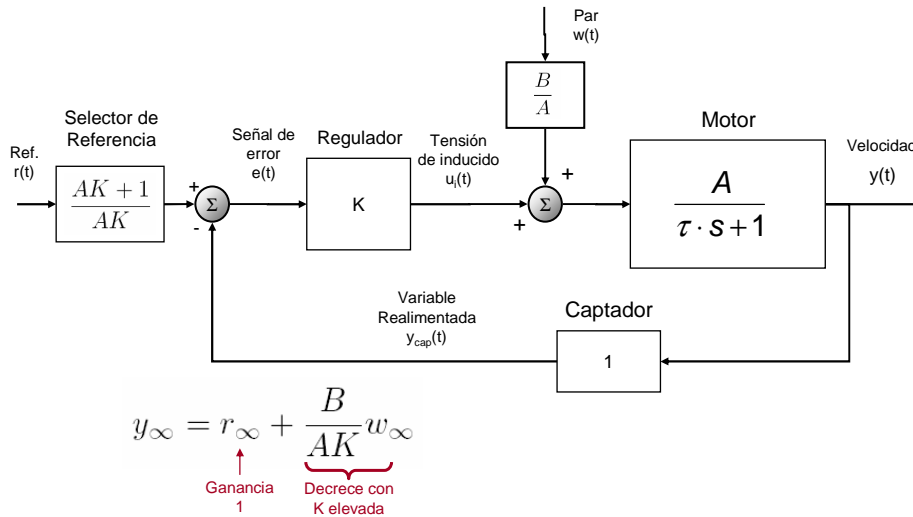
2006

Sistemas Automáticos

8

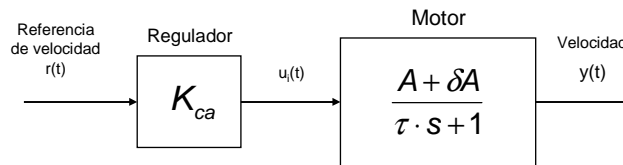


Selector de referencia



Sensibilidad ante variaciones en los parámetros (c.a.)

Cadena abierta
Cambio en la ganancia del motor



$T_{ca} = K_{ca} A$ Ganancia estática del sistema en c.a.



Sensibilidad: Definición de H. W. Bode

Variación relativa de y

Definición: $S_A^y = \frac{\left(\frac{\delta y}{y}\right)}{\left(\frac{\delta A}{A}\right)}$

Variación relativa de A

Puede calcularse para bucle abierto y bucle cerrado aplicando:

$$\delta y = \frac{\partial y}{\partial A} \cdot \delta A$$

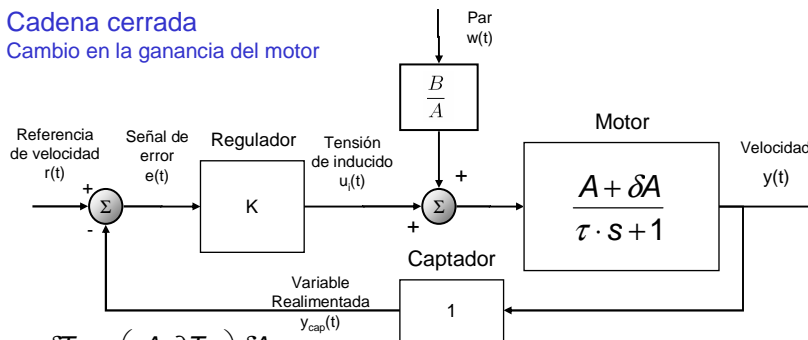
$$\frac{\delta T_{ca}}{T_{ca}} = \left(\frac{A}{T_{ca}} \frac{\partial T_{ca}}{\partial A} \right) \frac{\delta A}{A}$$

$$S_A^{T_{ca}} = \frac{A}{K_{ca} A} K_{ca} = 1 \text{ cierto para cualquier sistema en c.a.}$$



Sensibilidad ante variaciones en los parámetros (c.a.)

Cadena cerrada
Cambio en la ganancia del motor



$$\frac{\delta T_{cc}}{T_{cc}} = \left(\frac{A}{T_{cc}} \frac{\partial T_{cc}}{\partial A} \right) \frac{\delta A}{A} \quad T_{cc} : \text{Ganancia estática del sistema en c.c.}$$

$$S_A^{T_{cc}} = \frac{A}{KA} \frac{K(1+KA) - KAK}{(1+KA)^2} = \frac{K}{K(1+KA)} = \frac{1}{1+KA}$$



Linealización por realimentación

- Sea f un función no lineal que modela un proceso P

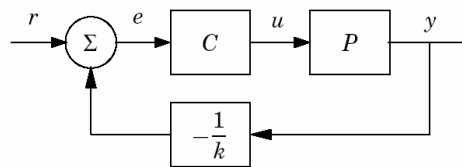
$$y = f(u)$$

- Sea C un controlador que consigue anular el error:

$$e = r - \frac{1}{k}y \approx 0$$

Entonces:

$$y \approx k \cdot r$$



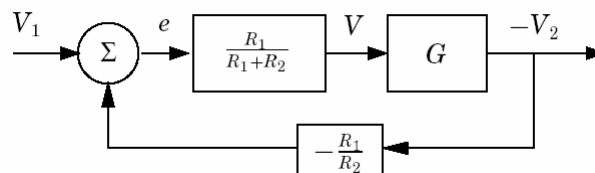
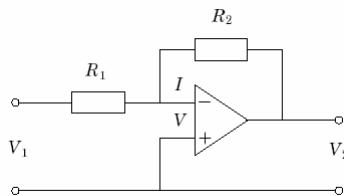
2006

Sistemas Automáticos

13



Ej: Amplificador de Black (1927)



2006

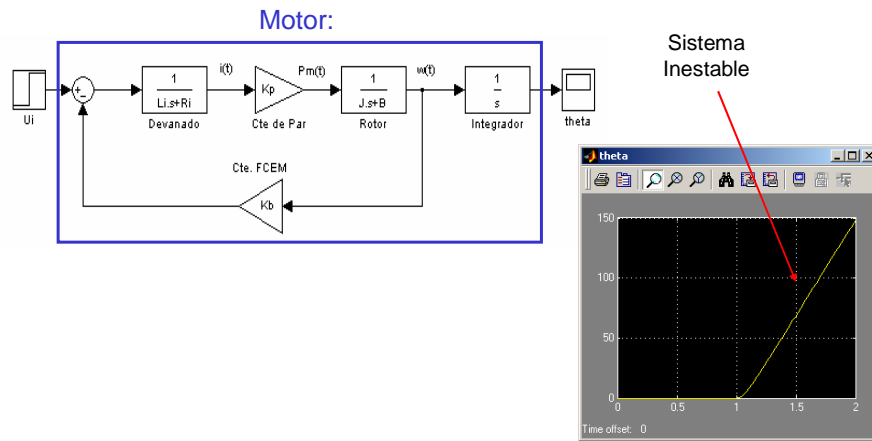
Sistemas Automáticos

14



Estabilización de sistemas inestables

Motor CC (sin realimentación)



2006

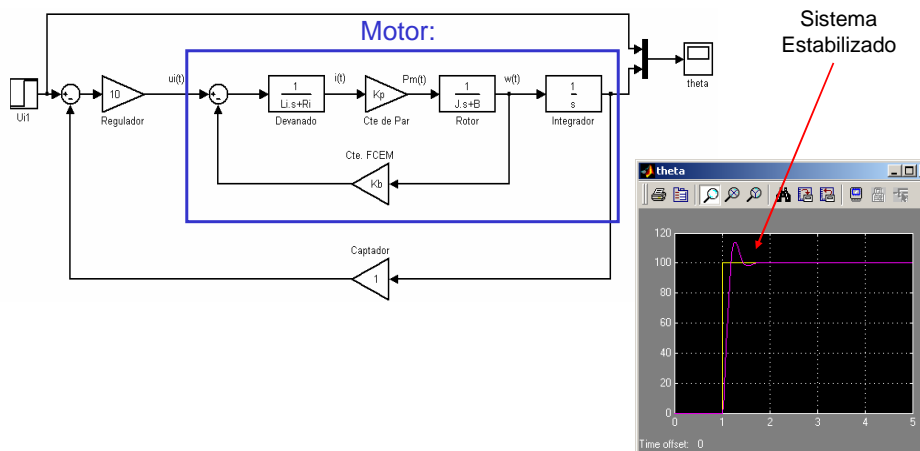
Sistemas Automáticos

15



Estabilización de sistemas inestables

Motor CC (con realimentación)



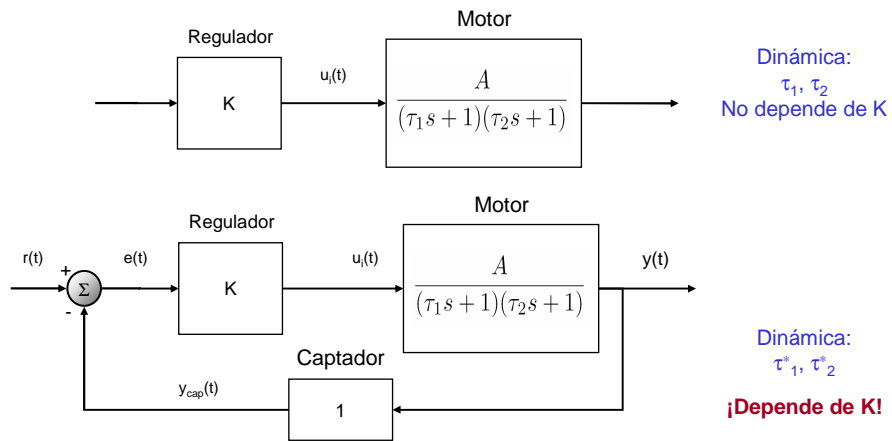
2006

Sistemas Automáticos

16



Variación de la respuesta dinámica



Polos de la FDT del sistema realimentado: $\tau_{12}^* = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 + AK)}}{2\tau_1\tau_2}$

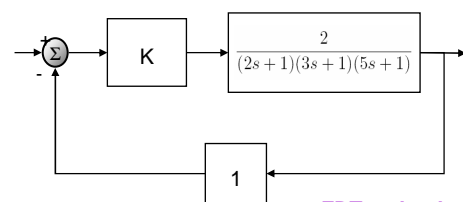
2006

Sistemas Automáticos

17

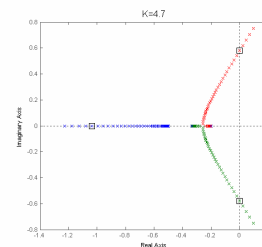
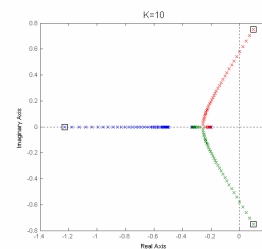
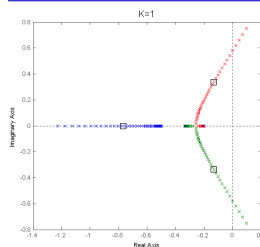
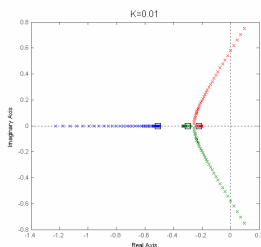


Variación de la respuesta dinámica



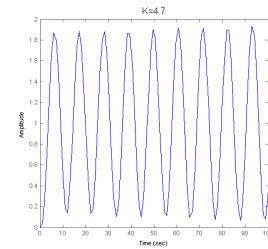
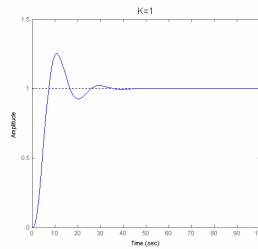
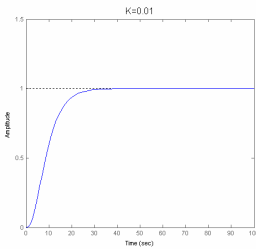
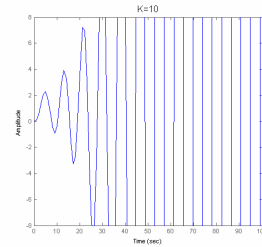
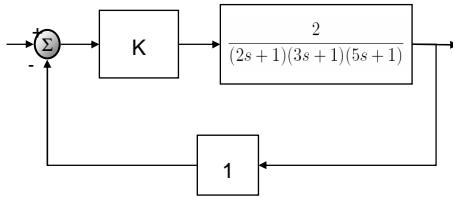
FDT en bucle cerrado:

$$M(s) = \frac{KG(s)H(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$





Variación de la respuesta dinámica



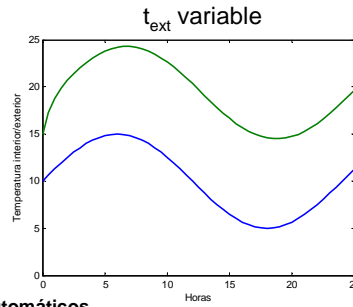
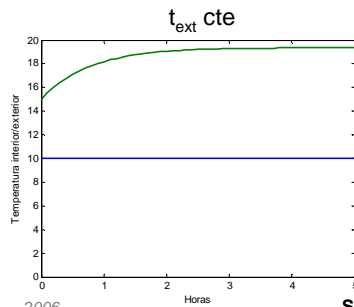
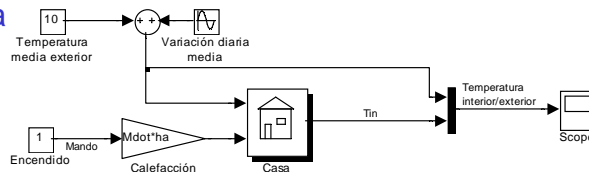
Inconvenientes de la realimentación

- Generación de posibles inestabilidades
- Necesidad de sensores
- Introducción de ruidos
- Complejidad adicional



Control todo-nada

Cadena abierta



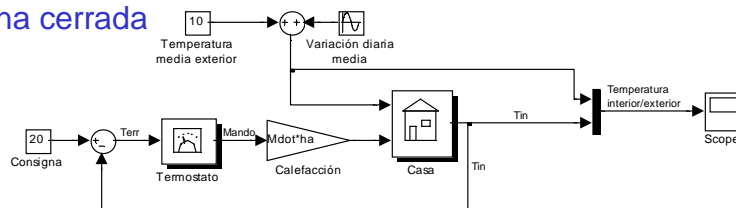
2006

21

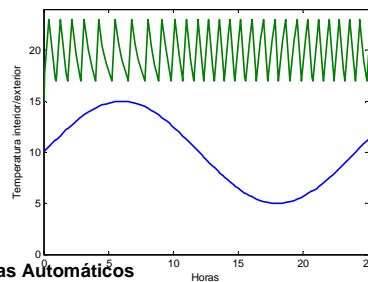


Control todo-nada

Cadena cerrada



- Parámetros de ajuste:
- Acciones de control: u_{max} , u_{min}
 - Histéresis



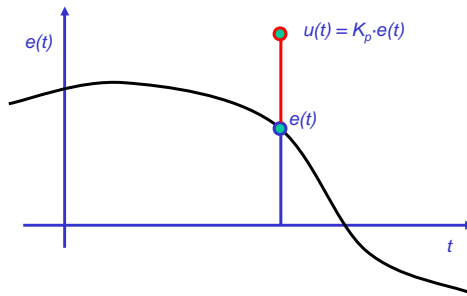
2006

22

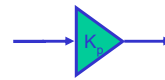


Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional (P)



$$u(s) = K_p \cdot e(s)$$



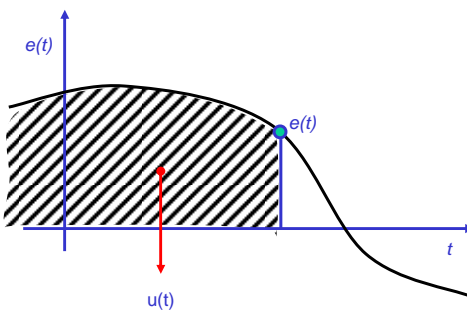
Propiedades

- La acción de control es directamente proporcional al error $e(t)$ cometido
- Esta acción surte efecto de forma instantánea a la aparición del error
- Reduce el error, tanto en seguimiento de referencias como el originado por perturbaciones, pero no lo anula en régimen permanente
- Valores elevados de K_p originan menos error y respuestas más rápidas, aunque una acción P excesiva pueden producir respuestas sobreosciladas o incluso inestables

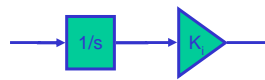


Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional-Integral (PI)

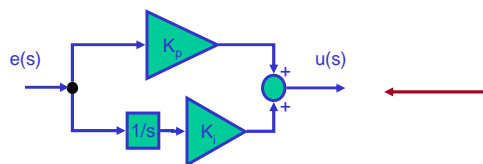


$$u(s) = K_p \cdot (1/s) \cdot e(s)$$



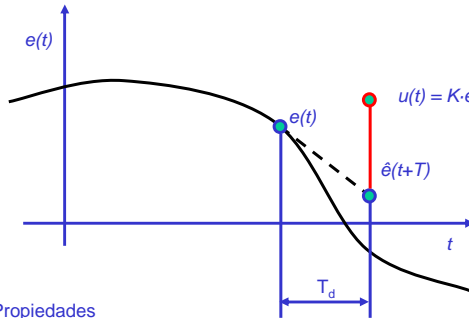
Propiedades

- Se basa en la integral del error
- Mientras el error persiste en régimen permanente, la acción de control se incrementa (el integrador sigue integrando)
- En régimen permanente, el error se hace cero (si no, tendríamos un sistema inestable)
- La acción se basa en la "historia" del error, por tanto conlleva cierto retraso (no confundir con retraso puro)
- Este retraso origina dinámicas lentas, más oscilatorias y a veces inestabilidad
- La acción integral siempre suele ir acompañada de una acción proporcional (K_p) → ACCIÓN Proporcional-Integral (PI)



Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional-Diferencial (PD)



$$u(t) = K \cdot \hat{e}(t+T_d) = e(t) + T_d \cdot de/dt$$

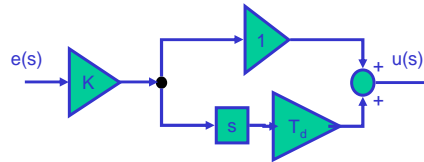
parte proporcional
parte diferencial

$$u(s) = K \cdot [e(s) + T_d \cdot s e(s)] = K(1+T_d s)e(s)$$

parte proporcional
parte diferencial

Propiedades

- Se basa en la predicción lineal del valor del error dentro de T_d segundos → es ANTICIPATIVA
- Esta predicción se basa en la pendiente del error (derivada)
- Su carácter anticipativo hace que, en general, mejore la dinámica de la respuesta



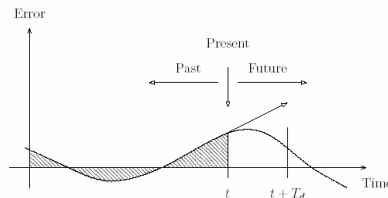
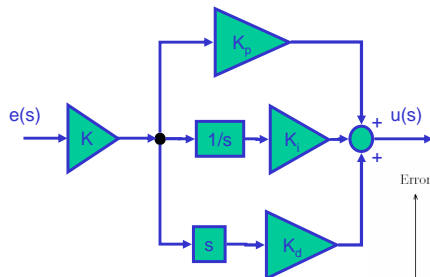
2006

Sistemas Automáticos

25

Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional-Integral-Diferencial (PID)



Propiedades

- Combina las tres acciones
- Bien diseñado puede reunir las ventajas de las tres
- Las tres acciones básicas P, PI, PD, son casos particulares de ésta
- La gran mayoría de los reguladores utilizados en la industria son PID's

2006

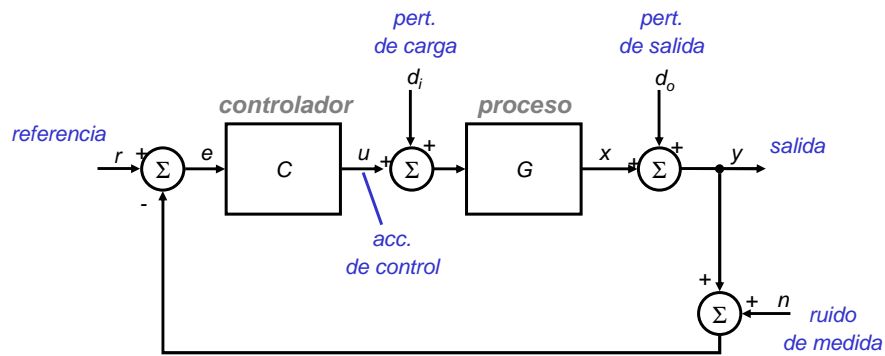
Sistemas Automáticos

26



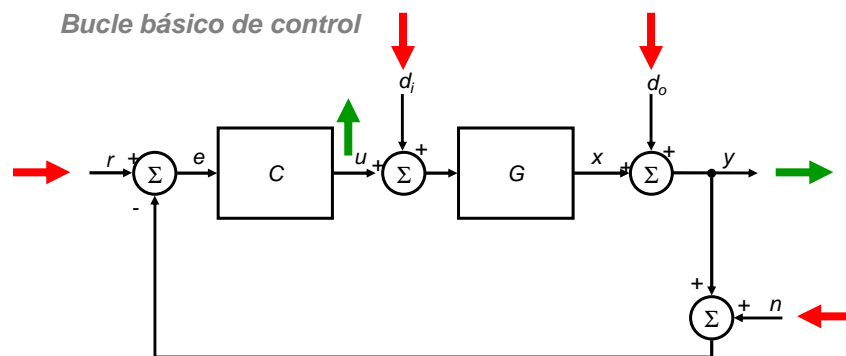
Funciones de sensibilidad

Bucle básico de control



Funciones de sensibilidad

Bucle básico de control



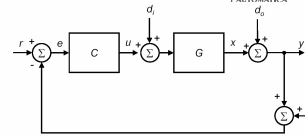
$$Y = \frac{GC}{1+GC}R + \frac{G}{1+GC}D_i + \frac{1}{1+GC}D_o - \frac{GC}{1+GC}N$$

$$U = \frac{C}{1+GC}R - \frac{GC}{1+GC}D_i - \frac{C}{1+GC}D_o - \frac{C}{1+GC}N$$



Funciones de sensibilidad

Las 4 funciones de sensibilidad



$$Y = \frac{GC}{1+GC}R + \frac{G}{1+GC}D_i + \frac{1}{1+GC}D_o - \frac{GC}{1+GC}N$$

$$U = \frac{C}{1+GC}R - \frac{G}{1+GC}D_i - \frac{1}{1+GC}D_o - \frac{C}{1+GC}N$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + G(s)C(s)} \quad \text{---> sensibilidad}$$

$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad \text{---> sensibilidad complementaria}$$

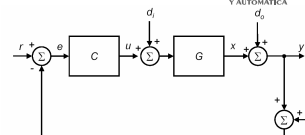
$$S_i(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad \text{---> sensibilidad de entrada}$$

$$S_u(s) = \frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)} \quad \text{---> sensibilidad de control}$$



Funciones de sensibilidad

Observaciones

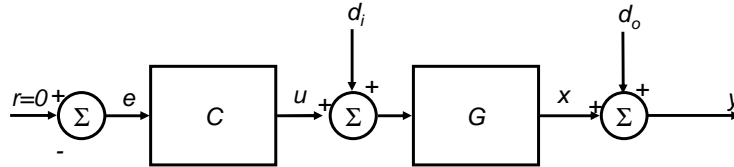


- El sistema realimentado está caracterizado por 4 funciones de transferencia (S, T, S_u, S_i)
- Estas 4 funciones condensan toda la información sobre la respuesta del sistema
- Sus propiedades pueden mostrarse mediante su respuesta frecuencial o mediante su respuesta temporal



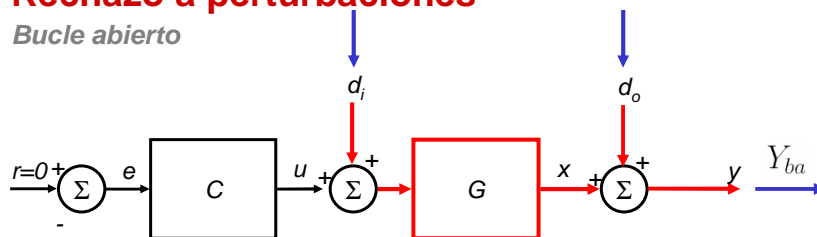
Rechazo a perturbaciones

Bucle abierto



Rechazo a perturbaciones

Bucle abierto

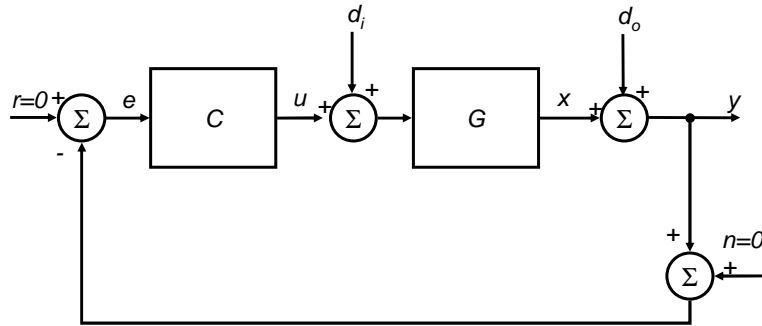


$$Y_{ba} = G(s)D_i(s) + D_o(s)$$



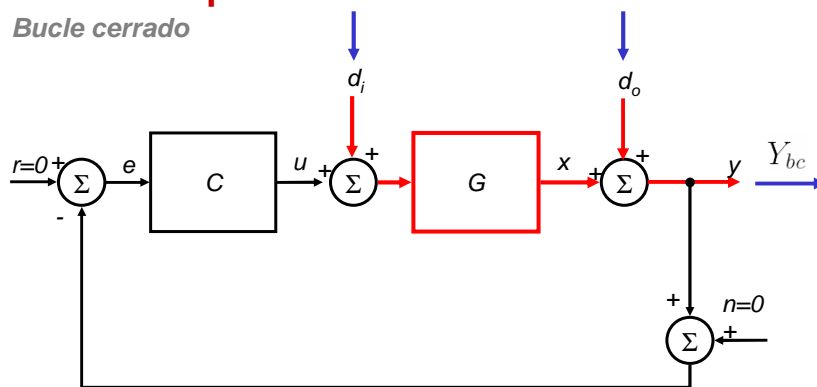
Rechazo a perturbaciones

Bucle cerrado



Rechazo a perturbaciones

Bucle cerrado



$$Y_{bc} = \frac{G(s)D_i(s) + D_o(s)}{1 + G(s)C(s)} = S(s) [G(s)D_i(s) + D_o(s)]$$



Rechazo a perturbaciones

Interpretación de $S(s)$

Bucle abierto $\rightarrow Y_{ba} = G(s)D_i(s) + D_o(s)$

Bucle cerrado $\rightarrow Y_{bc} = \frac{G(s)D_i(s) + D_o(s)}{1 + G(s)C(s)} = S(s) [G(s)D_i(s) + D_o(s)]$



$$Y_{bc} = S(s)Y_{ba}$$



Rechazo a perturbaciones

Interpretación de $S(s)$

$$Y_{bc} = S(s)Y_{ba}$$

- La función de sensibilidad describe la atenuación en las perturbaciones que proporciona la realimentación
- La realimentación atenúa perturbaciones a frecuencias en las que $|S(j\omega)| < 1$
- La realimentación amplifica perturbaciones a frecuencias en las que $|S(j\omega)| > 1$

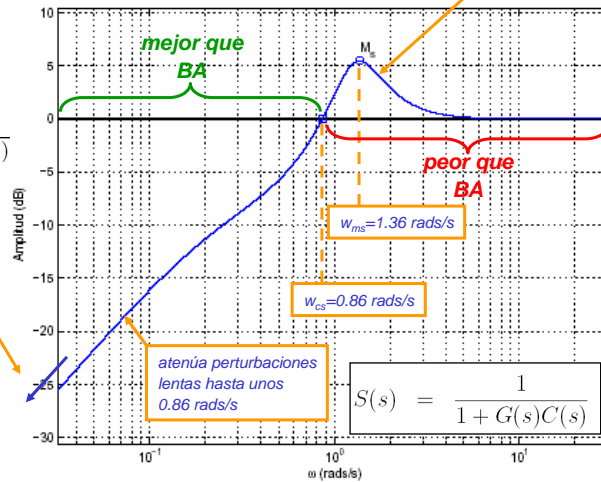
Rechazo a perturbaciones

Interpretación de $S(s)$. Regulador PI ($k_p=1, k_i=0.5$)

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)}$$

bloquea las perturbaciones en continua (reg. perm)



2006

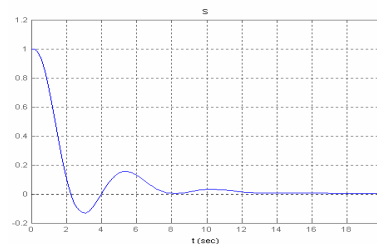
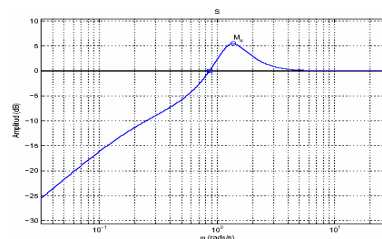
Sistemas Automáticos

37

Rechazo a perturbaciones

Interpretación de $S(s)$

- ➔ $S(s)$ describe cuánto atenúa la realimentación las perturbaciones en comparación con bucle abierto
- ➔ permite dar esa información en **frecuencia** (frecuencias vulnerables, frecuencias robustas ...)
- ➔ Puede también representarse en el **tiempo**
- ➔ informa también sobre:
 - Estabilidad relativa
 - Robustez
 - etc.
 (a continuación...)



2006

Sistemas Automáticos

38



Estabilidad y sensibilidad

Los márgenes clásicos pueden establecerse en términos de α_1 y α_2

$$MG = \frac{1}{1 - \alpha_1} \quad MF = 2 \arcsin \frac{\alpha_2}{2}$$

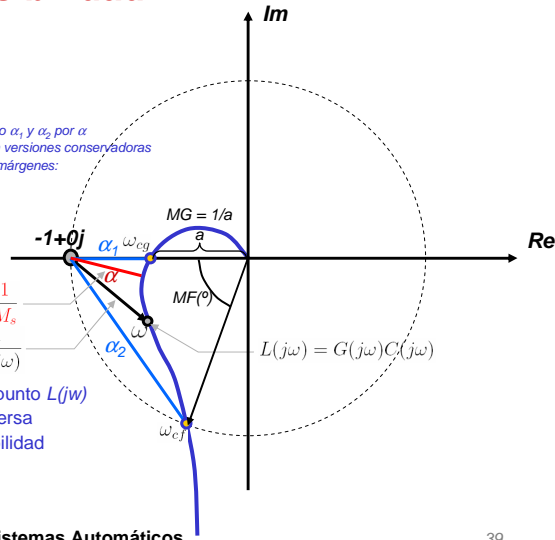
sustituyendo α_1 y α_2 por α se obtienen versiones conservadoras de los dos márgenes:

$$MG^* = \frac{1}{1 - \alpha} \leq MG$$
$$MF^* = 2 \arcsin \frac{\alpha}{2} \leq MF$$

punto de distancia mínima: $M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)|$

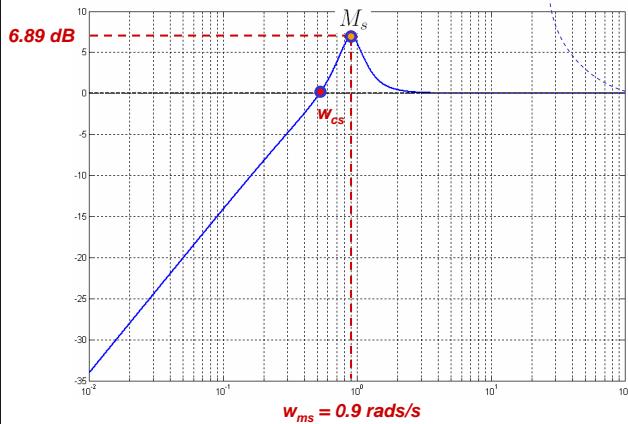
$$\alpha = \frac{1}{M_s}$$
$$1 + L(j\omega) = \frac{1}{S(j\omega)}$$

La distancia del punto -1 al punto $L(j\omega)$ es precisamente la inversa del módulo de la sensibilidad



Estabilidad y sensibilidad

Visualizando la curva de sensibilidad puede obtenerse información muy útil sobre la estabilidad



Márgenes robustos:

$$MG^* = \frac{1}{1 - \alpha}$$
$$MF^* = 2 \arcsin \frac{\alpha}{2}$$



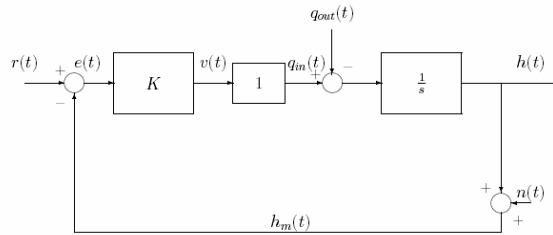
Ej: Colada continua

$$S = \frac{1}{1 + CP} = \frac{1}{1 + K/s} = \frac{s}{s + K}$$

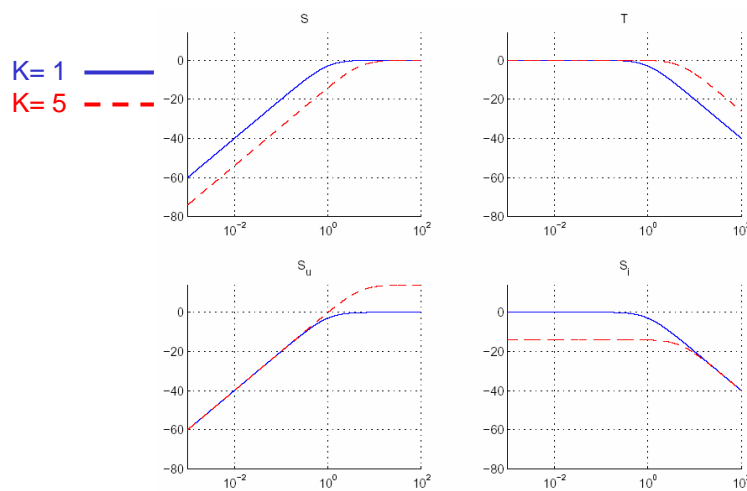
$$T = \frac{CP}{1 + CP} = \frac{K/s}{1 + K/s} = \frac{K}{s + K}$$

$$S_u = \frac{C}{1 + CP} = \frac{Ks}{s + K}$$

$$S_i = \frac{P}{1 + CP} = \frac{1}{s + K}$$

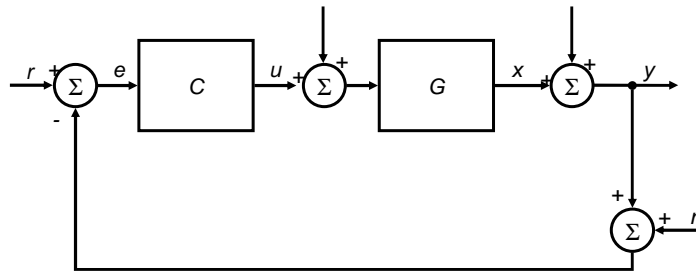


Ej: Colada continua





Ej: Análisis de las acciones P, PI, PD



Controlador:

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

Proceso:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Tipo de control

proporcional (P):

proporcional-integral (PI):

proporcional-diferencial (PD):

Parámetros $\{k_p, k_i, k_d\}$

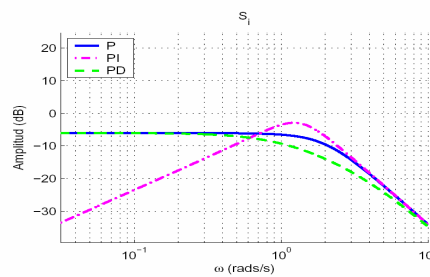
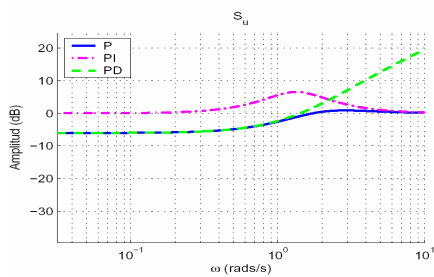
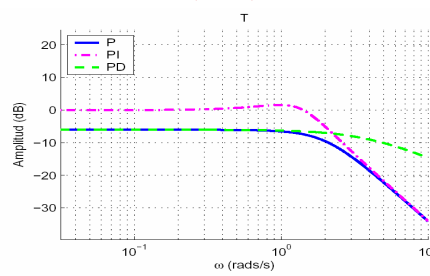
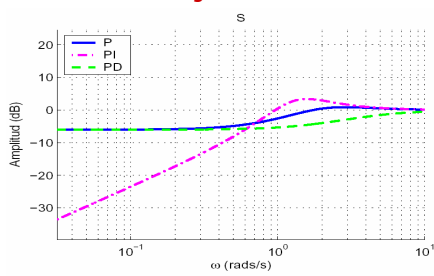
$\{1, 0, 0\}$

$\{1, 1.5, 0\}$

$\{1, 0, 1\}$



Ej: Análisis de las acciones P, PI, PD





Referencias

[Franklin02] Franklin, G.F. et al. **Tema 4** de “*Feedback Control of Dynamic Systems*”, 4ª edición, Prentice-Hall, 2002.

[Asmur05] Astrom, K.J., Murray R.M. **Tema 1** de “*Feedback Systems*”

http://www.cds.caltech.edu/~murray/books/AM05/pdf/am05-intro_14jan06.pdf

[Astrom02] Astrom, K.J. **Tema 5** de “*Control System Design. Lecture Notes for ME 155A*”

<http://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds101/fa02/caltech/astrom-ch5.pdf>