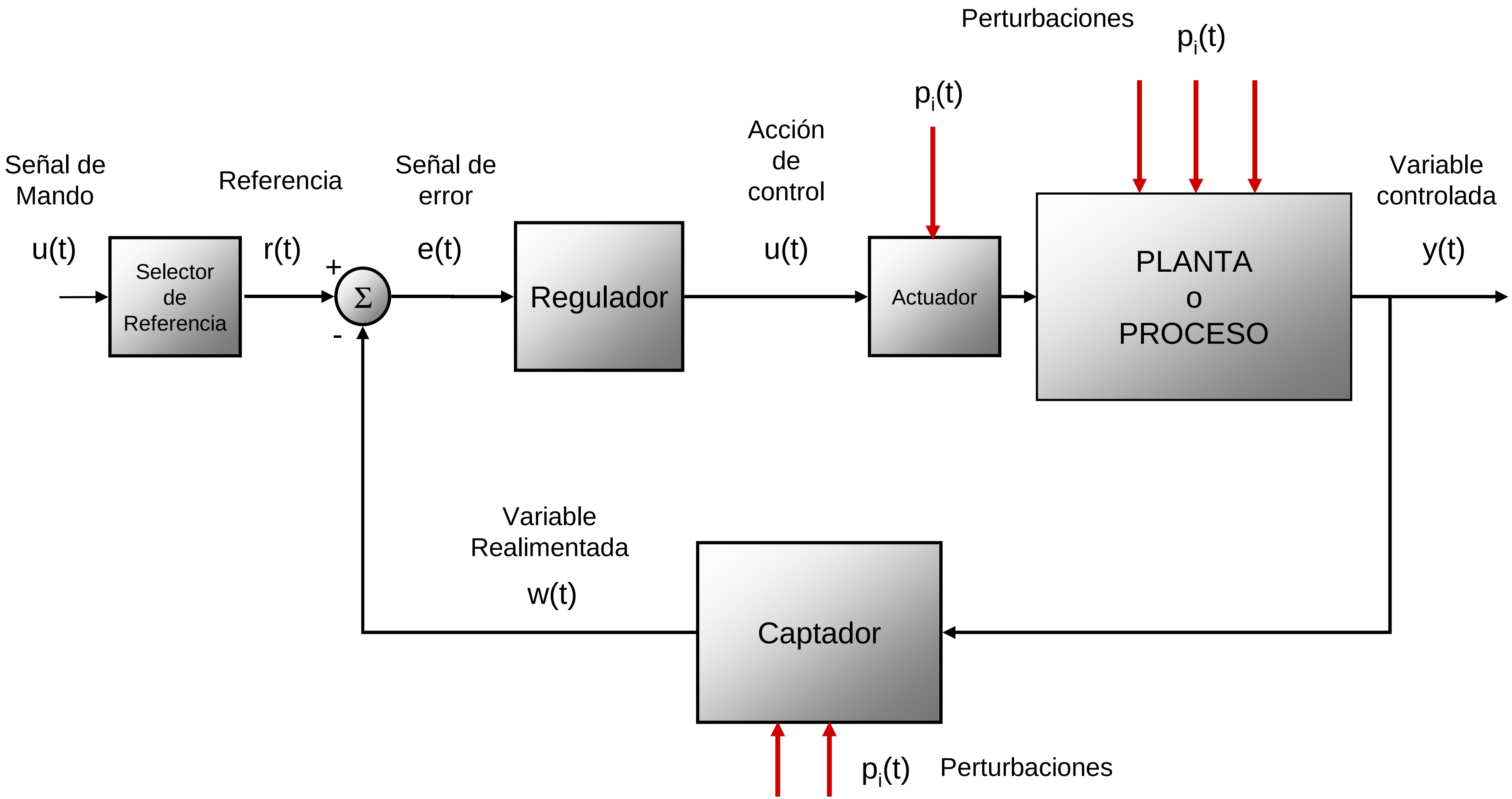
Realimentación

Tema 3

Índice

- Ventajas
- Inconvenientes
- El regulador todo-nada
- El regulador PID
- Funciones de Sensibilidad

Lazo típico de realimentación

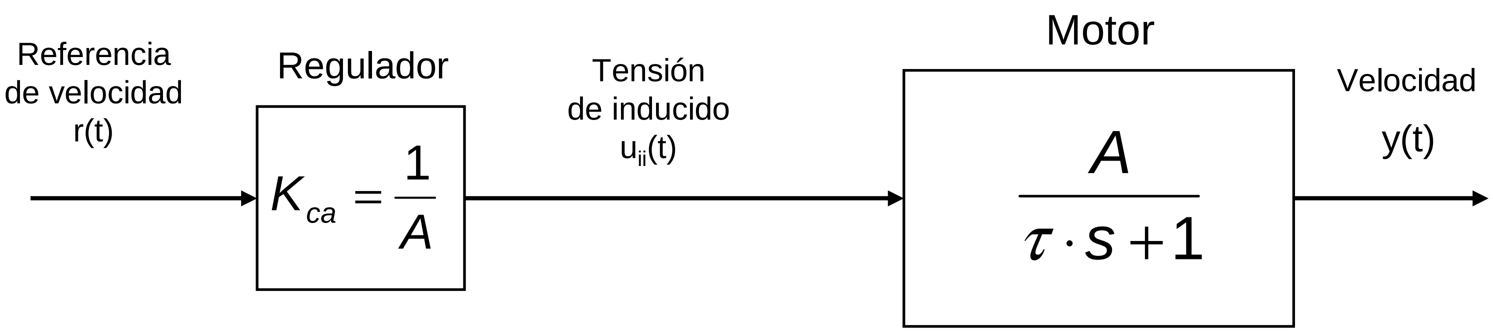


Ventajas de la realimentación

- Rechazo de perturbaciones
- Seguimiento de referencias
- Sensibilidad a variaciones en parámetros
- Linealización
- Estabilización de sistemas inestables
- Variación de la respuesta dinámica

Seguimiento de referencias (c.a.)

Control en cadena abierta



$$y_\infty = A \cdot u_{i\infty} = A \frac{1}{A} r_\infty = r_\infty$$

$$r_\infty = 100 \frac{rad}{s}$$

$$y_\infty = 100 \frac{rad}{s}$$

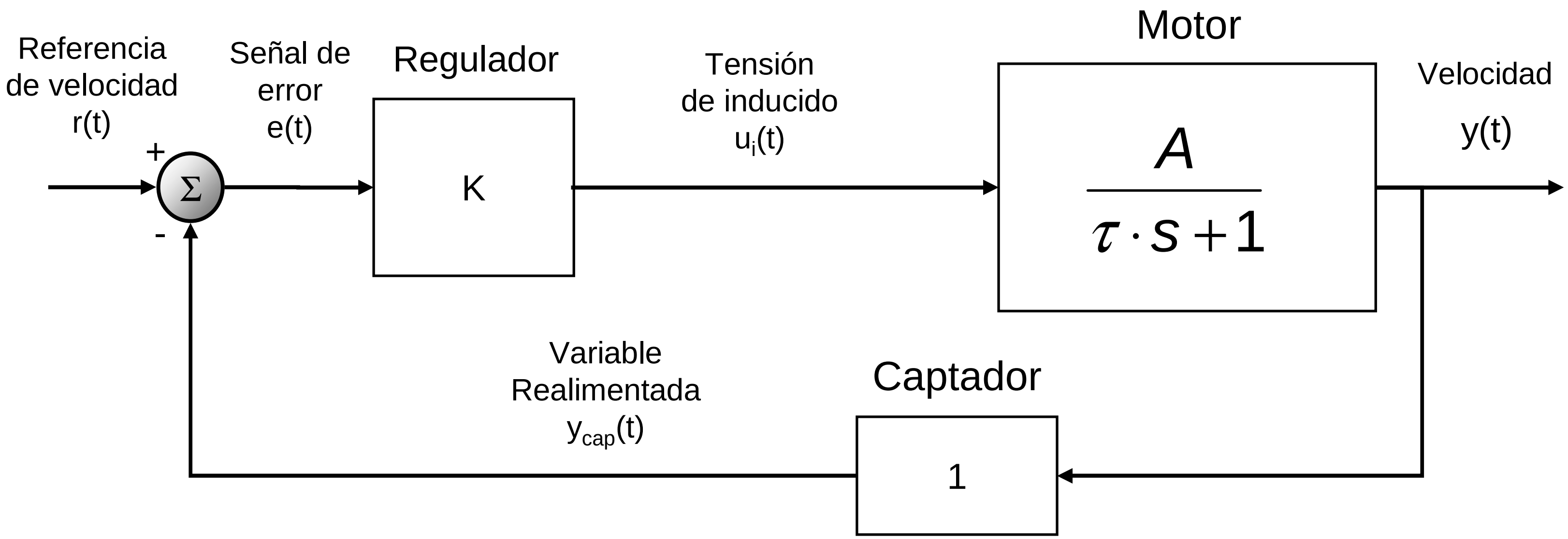
$$L \approx 0$$

$$\tau = \frac{1}{60} seg$$

$$A = 10 \frac{rad}{V \cdot s}$$

Seguimiento de referencias (c.c.)

Control en cadena cerrada



$$y_\infty = \frac{AK}{1+AK} r_\infty$$

$$K = 10$$

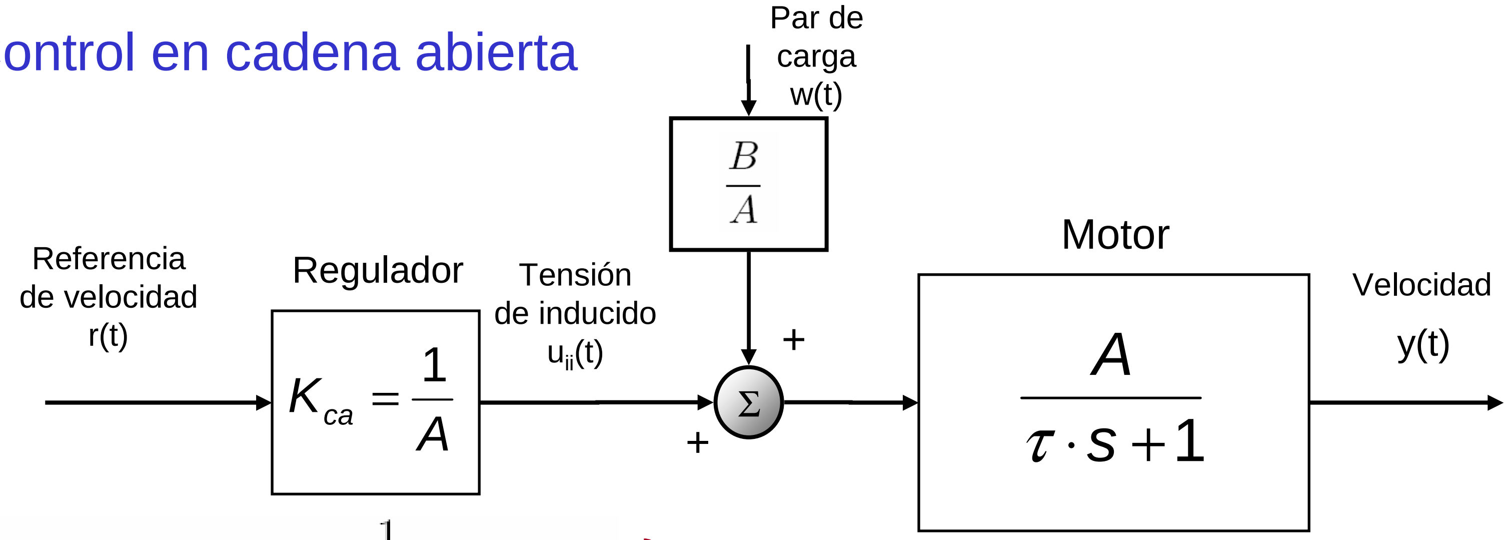
$$y_\infty = \frac{10 \cdot 10}{1+10 \cdot 10} r_\infty = \frac{100}{101} r_\infty$$

$$r_\infty = 100 \frac{rad}{s}$$

$$y_\infty = 99.01 \frac{rad}{s}$$

Rechazo de perturbaciones (c.a.)

Control en cadena abierta

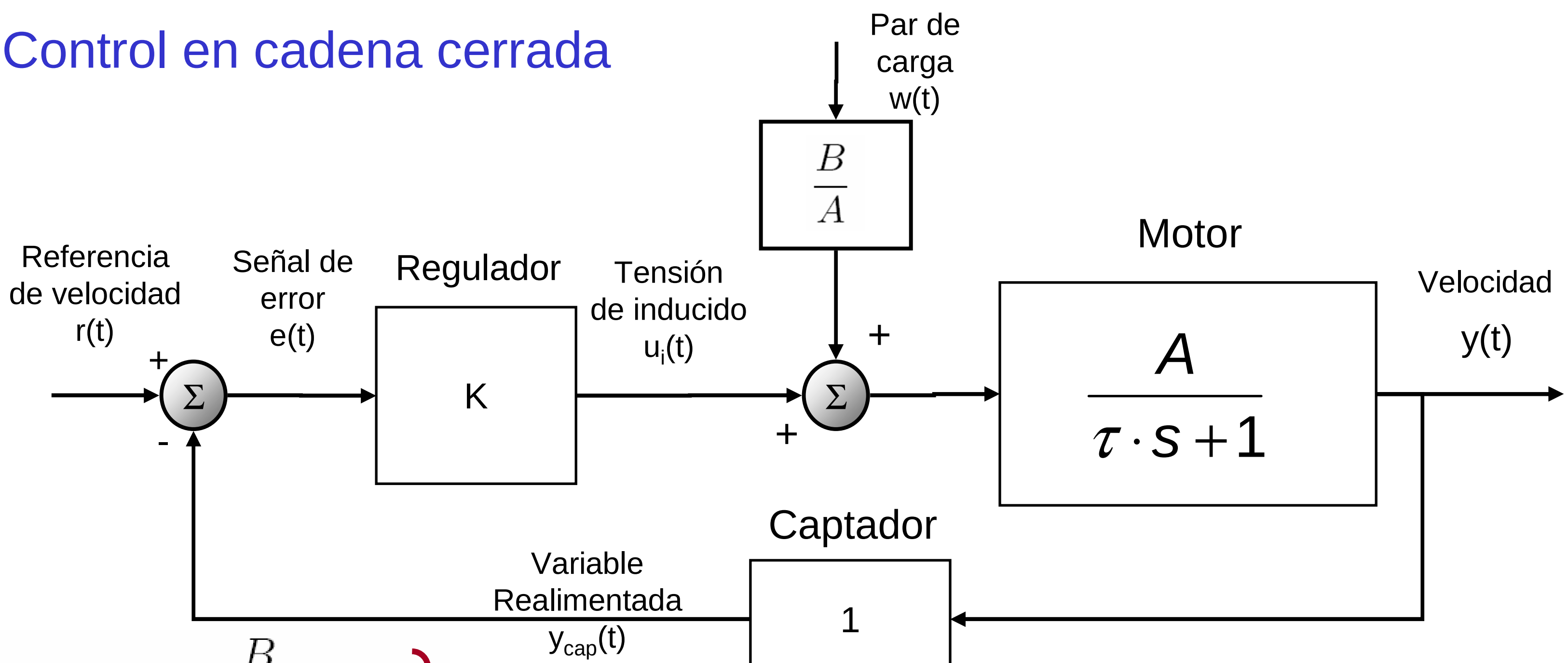


$$\left.\begin{aligned} y_\infty|_{w=0} &= Au_{i\infty} = A\frac{1}{A}r_\infty = r_\infty \\ y_\infty|_{r=0} &= A\frac{B}{A}w_\infty = Bw_\infty \end{aligned}\right\} \longrightarrow y_\infty = y_\infty|_{r=0} + y_\infty|_{w=0} = r_\infty + Bw_\infty$$

$$\left.\begin{aligned} B &= 50\frac{rad}{N\cdot m\cdot s} \\ w_\infty &= -0.1 N\cdot m \end{aligned}\right\} \longrightarrow y_\infty = 100 + 50\cdot(-0.1) = 95\frac{rad}{s}$$

Rechazo de perturbaciones (c.c.)

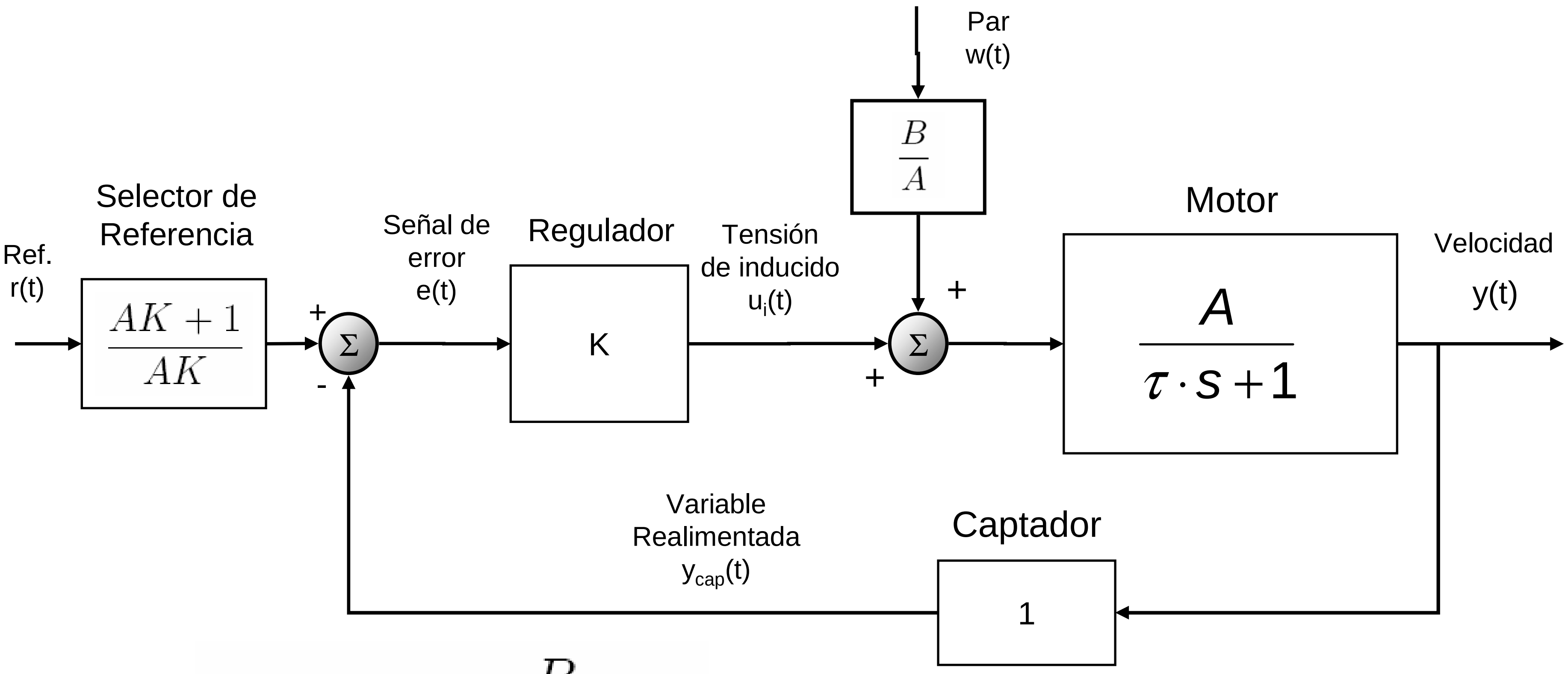
Control en cadena cerrada



$$\left.\begin{aligned} y_\infty|_{r=0} &= \frac{B}{1+AK}w_\infty \\ y_\infty|_{w=0} &= \frac{AK}{1+AK}r_\infty \end{aligned}\right\} \longrightarrow y_\infty = y_\infty|_{r=0} + y_\infty|_{w=0} = \underbrace{\frac{AK}{1+AK}}_{\text{Tiende a 1}}r_\infty + \underbrace{\frac{B}{1+AK}}_{\text{Decrece con K elevada}}w_\infty$$

$$y_\infty = \frac{10\cdot 10}{1+10\cdot 10}100 + \frac{50}{1+10\cdot 10}(-0.1) = 99.01 - 0.0495 = 98.96\frac{rad}{s}$$

Selector de referencia



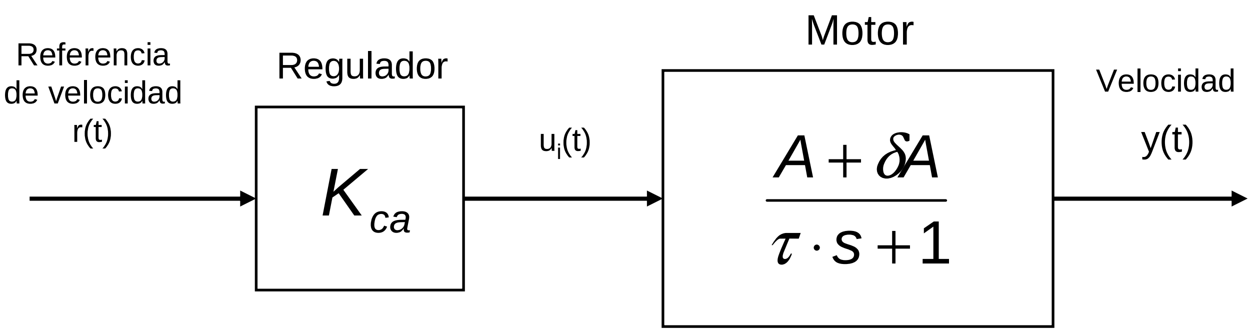
$$y_\infty = r_\infty + \underbrace{\frac{B}{AK}}_{\text{Decrece con K elevada}} w_\infty$$

Ganancia 1

Sensibilidad ante variaciones en los parámetros (c.a.)

Cadena abierta

Cambio en la ganancia del motor



$T_{ca} = K_{ca} A$ Ganancia estática del sistema en c.a.

Sensibilidad: Definición de H. W. Bode

Definición:

$$S_A^y = \frac{\left(\frac{\delta y}{y}\right)}{\left(\frac{\delta A}{A}\right)}$$

Variación relativa de y

Variación relativa de A

Puede calcularse para bucle abierto y bucle cerrado aplicando:

$$\boxed{\delta y = \frac{\partial y}{\partial A} \cdot \delta A}$$

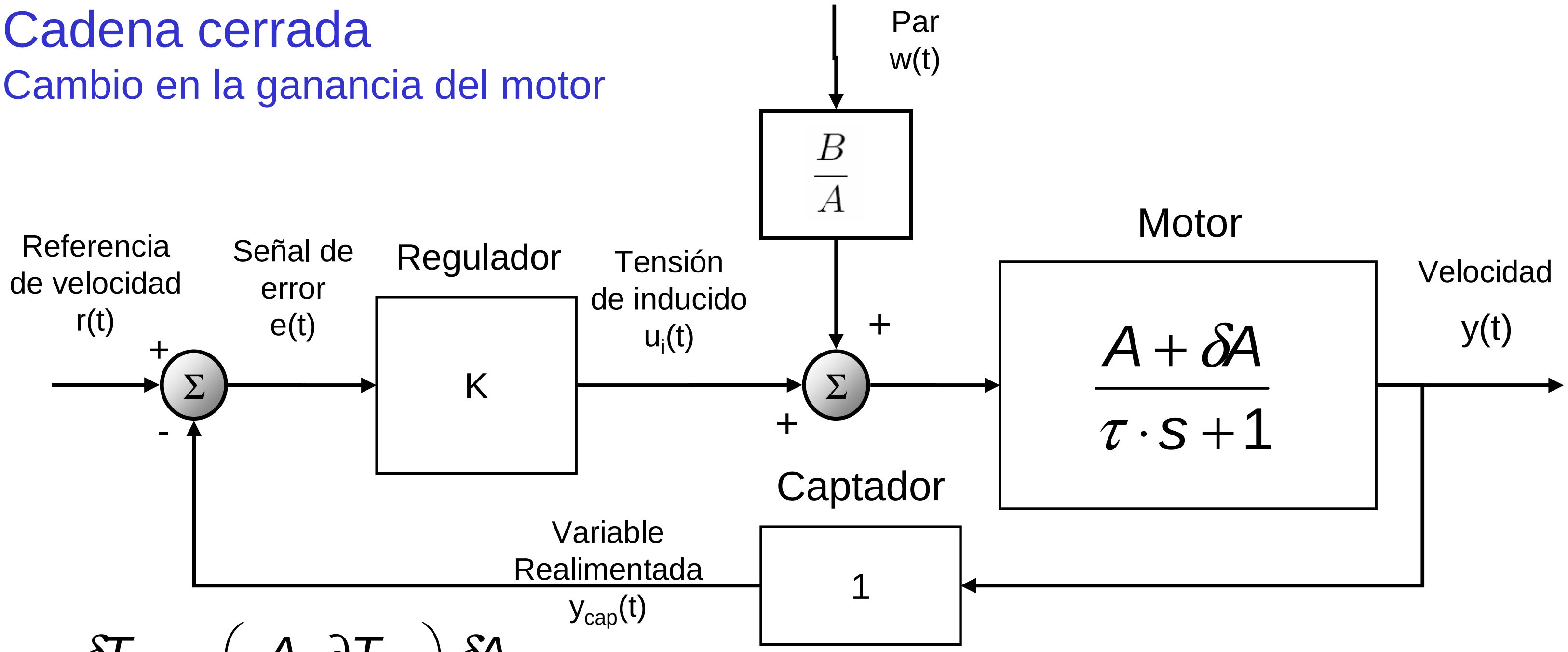
$$\frac{\delta T_{ca}}{T_{ca}} = \left(\frac{A}{T_{ca}} \frac{\partial T_{ca}}{\partial A}\right) \frac{\delta A}{A}$$

$$S_A^{T_{ca}} = \frac{A}{K_{ca} A} K_{ca} = 1 \quad \text{cierto para cualquier sistema en c.a.}$$

Sensibilidad ante variaciones en los parámetros (c.a.)

Cadena cerrada

Cambio en la ganancia del motor



$$\frac{\delta T_{cc}}{T_{cc}} = \left(\frac{A}{T_{cc}}\frac{\partial T_{cc}}{\partial A}\right)\frac{\delta A}{A}$$

T_{cc} : Ganancia estática del sistema en c.c.

$$S_A^{T_{cc}} = \frac{A}{\frac{KA}{1+KA}}\frac{K(1+KA)-KAK}{(1+KA)^2} = \frac{K}{K(1+KA)} = \frac{1}{1+KA}$$

Linealización por realimentación

- Sea *f* un función no lineal que modela un proceso P

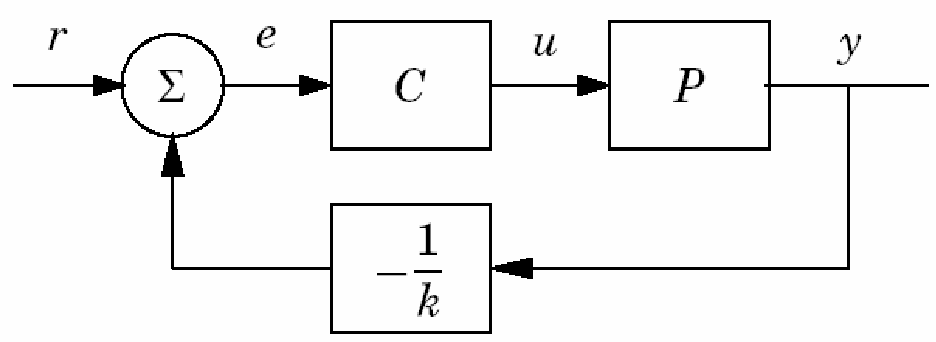
$$y = f(u)$$

- Sea C un controlador que consigue anular el error:

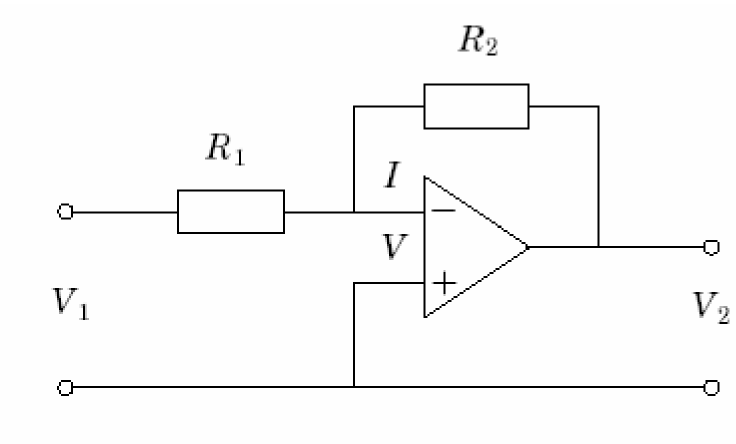
$$e = r - \frac{1}{k} y \approx 0$$

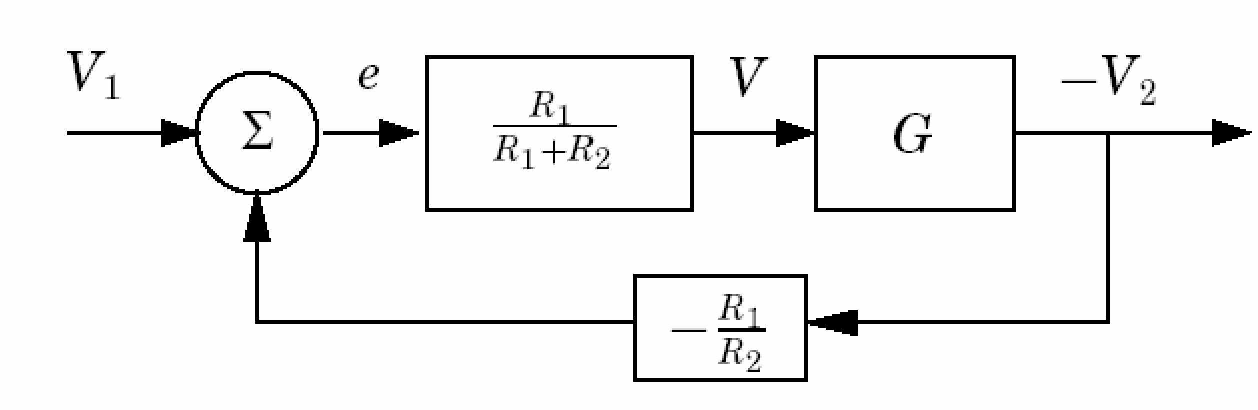
Entonces:

$$y \approx k \cdot r$$



Ej: Amplificador de Black (1927)

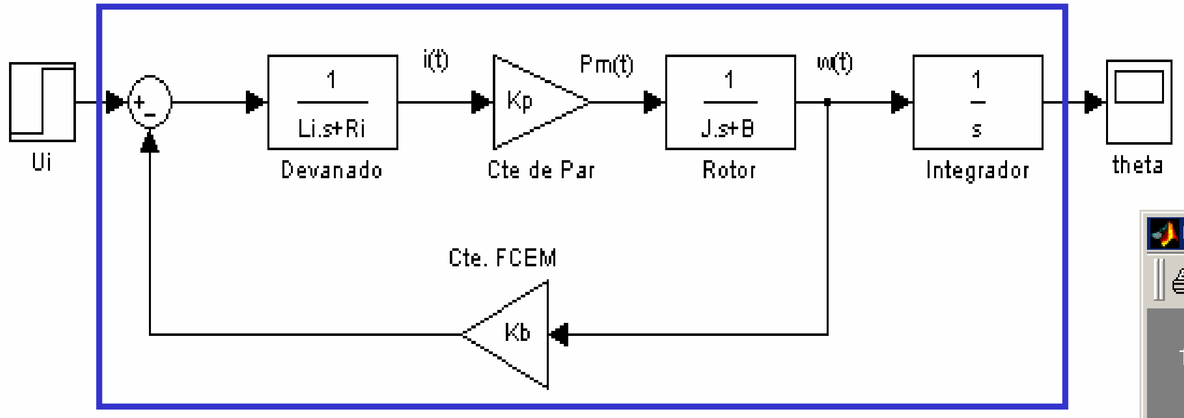




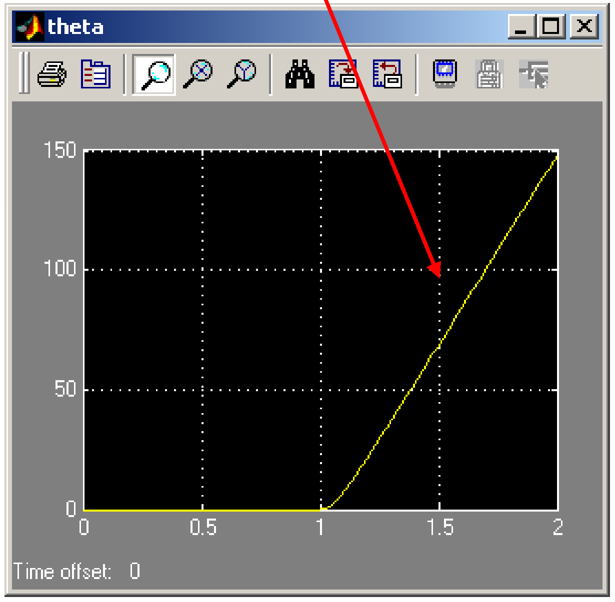
Estabilización de sistemas inestables

Motor CC (sin realimentación)

Motor:

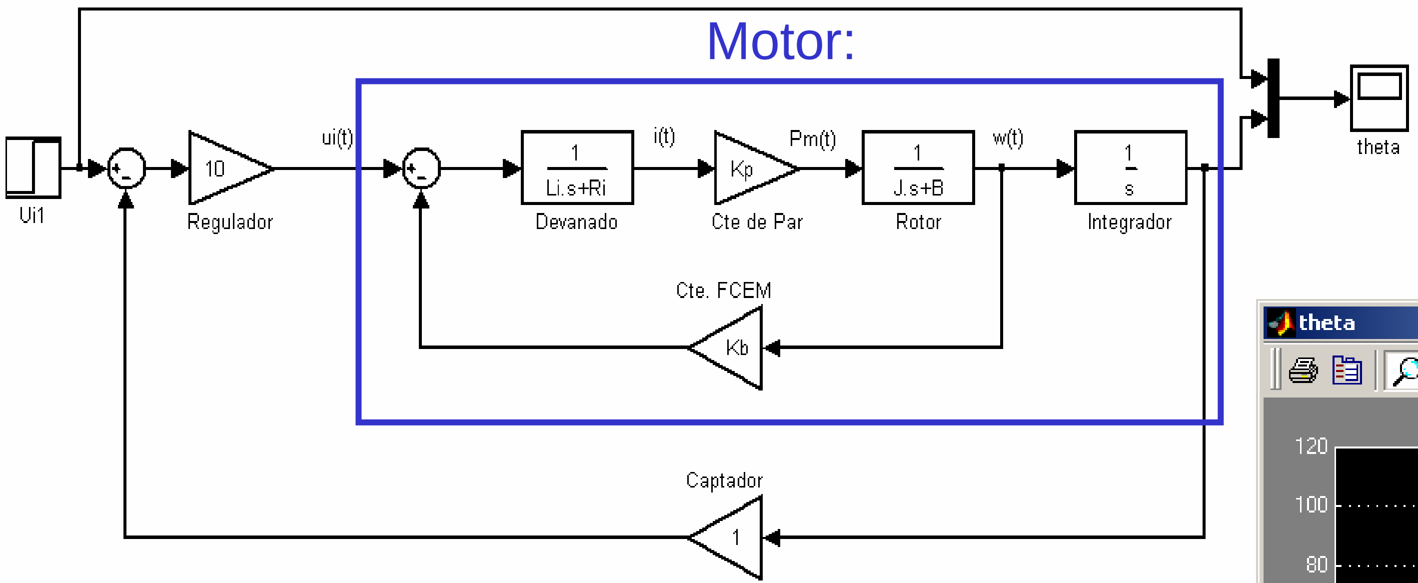


Sistema Inestable

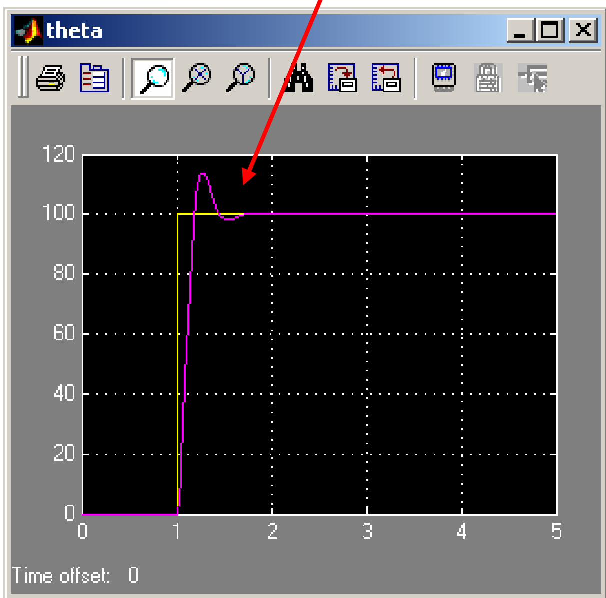


Estabilización de sistemas inestables

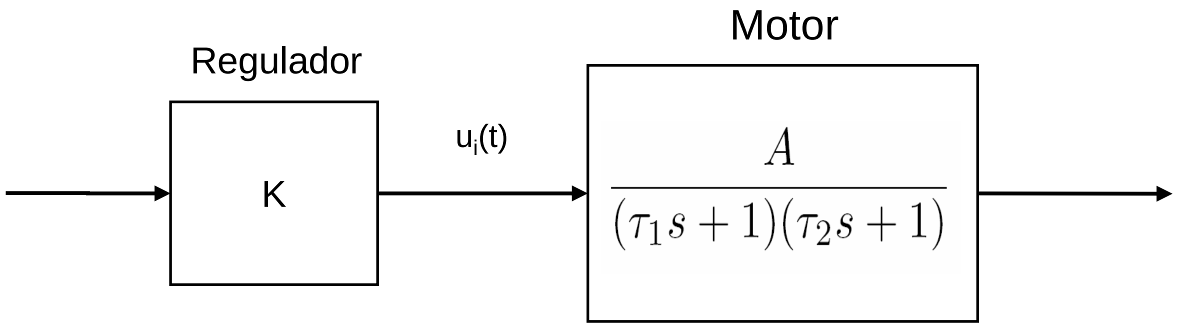
Motor CC (con realimentación)



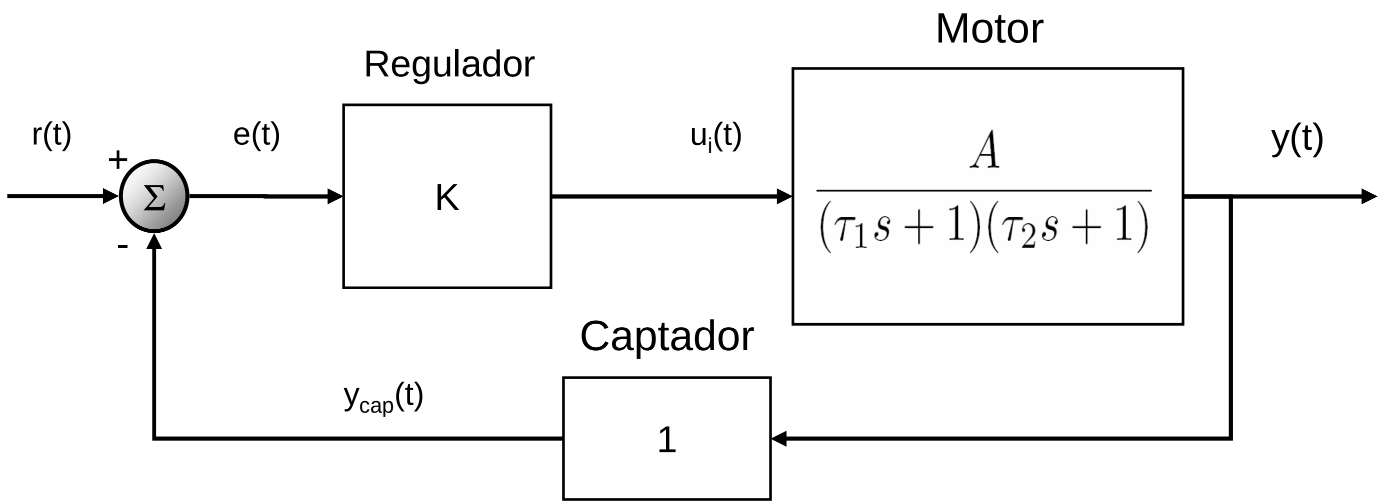
Sistema
Estabilizado



Variación de la respuesta dinámica



Dinámica:
τ_1, τ_2
No depende de K



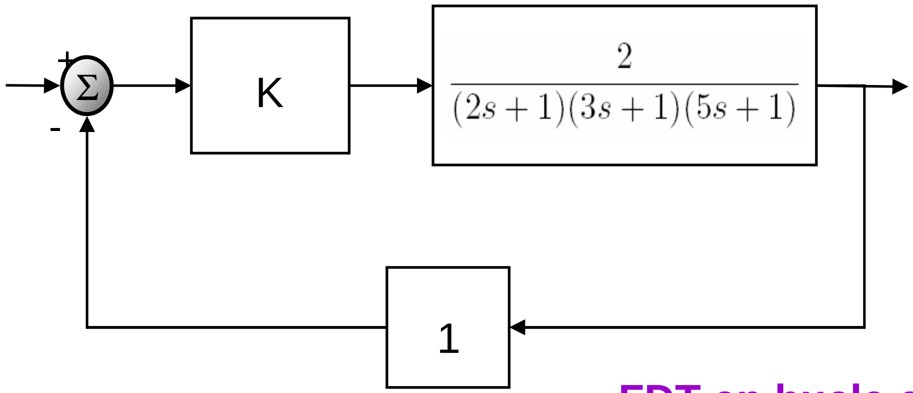
Dinámica:
τ^*_1, τ^*_2

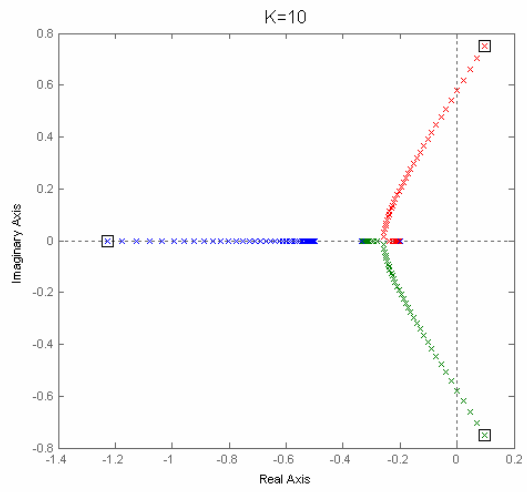
¡Depende de K!

Polos de la FDT del sistema realimentado:

$$\tau^*_{12} = \frac{-(\tau_1 + \tau_2) \pm \sqrt{(\tau_1 + \tau_2)^2 - 4\tau_1\tau_2(1 + AK)}}{2\tau_1\tau_2}$$

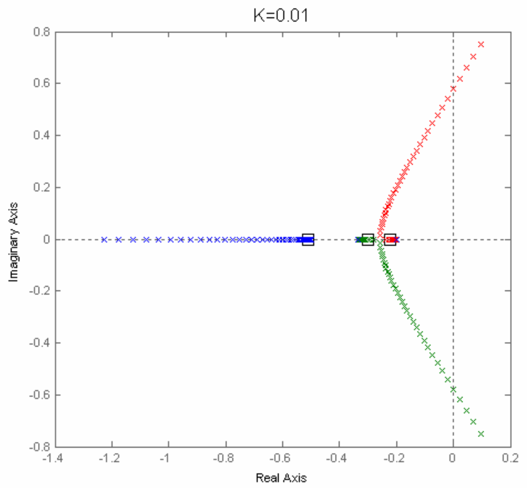
Variación de la respuesta dinámica

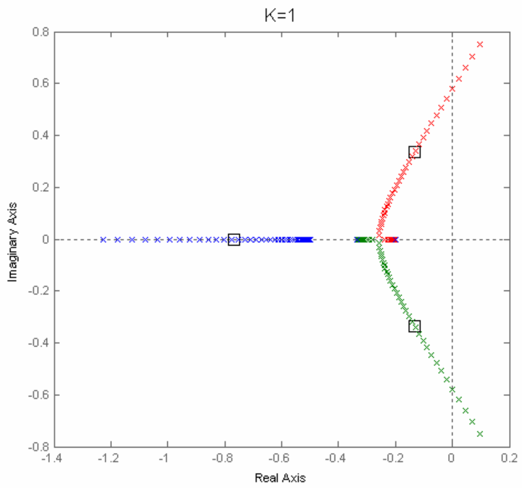


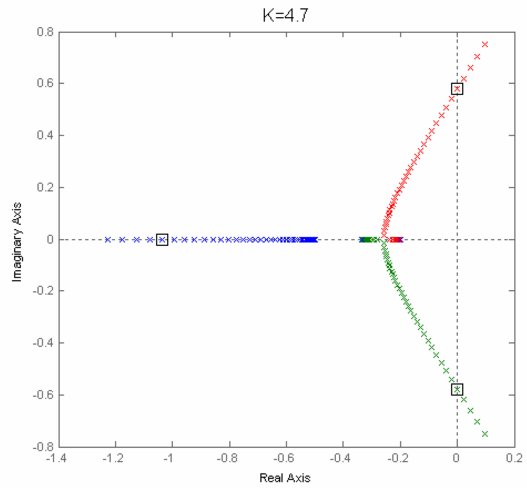


FDT en bucle cerrado:

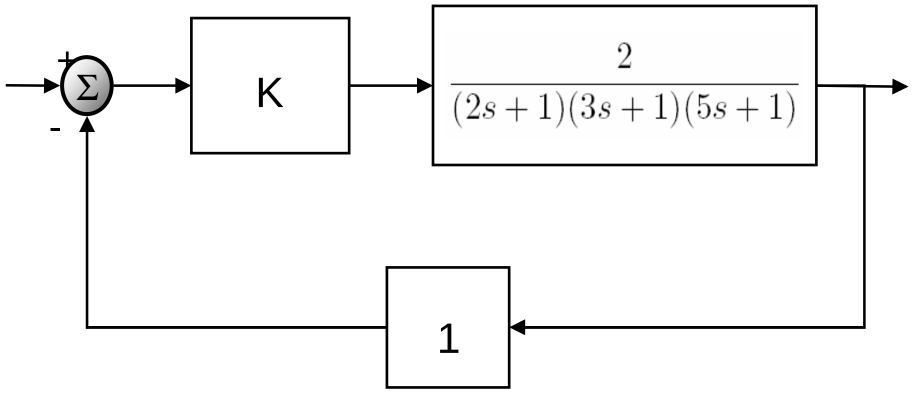
$$M(s) = \frac{KG(s)H(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

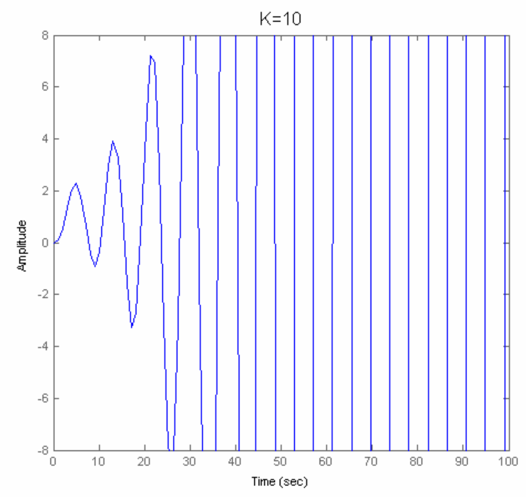


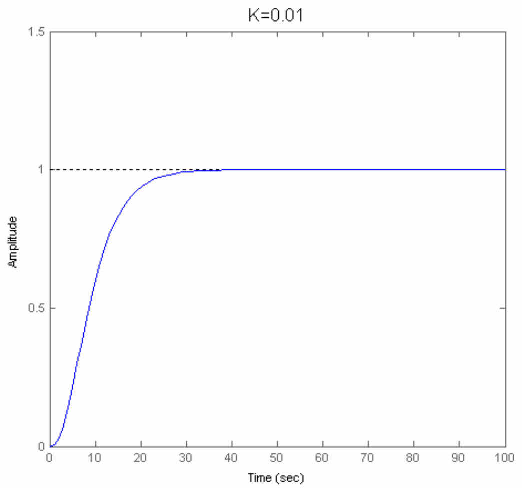


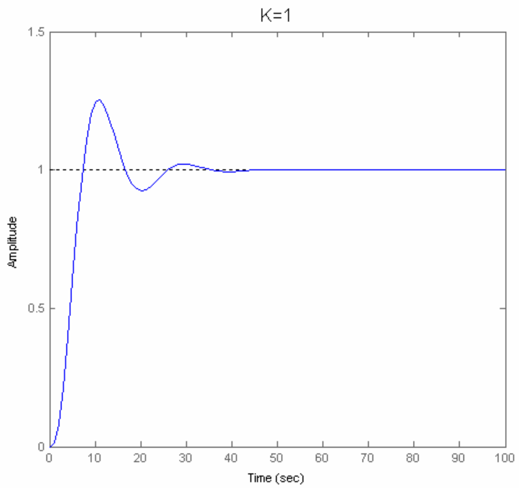


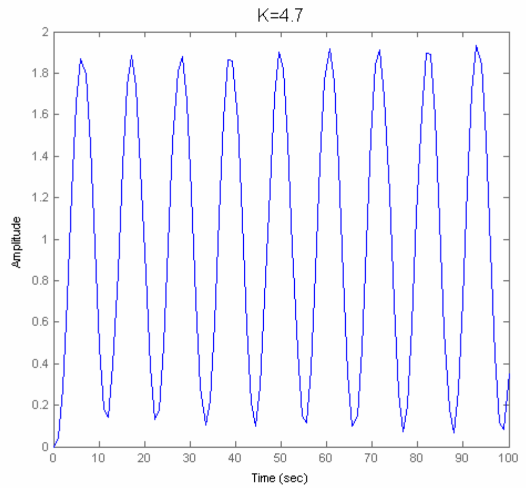
Variación de la respuesta dinámica









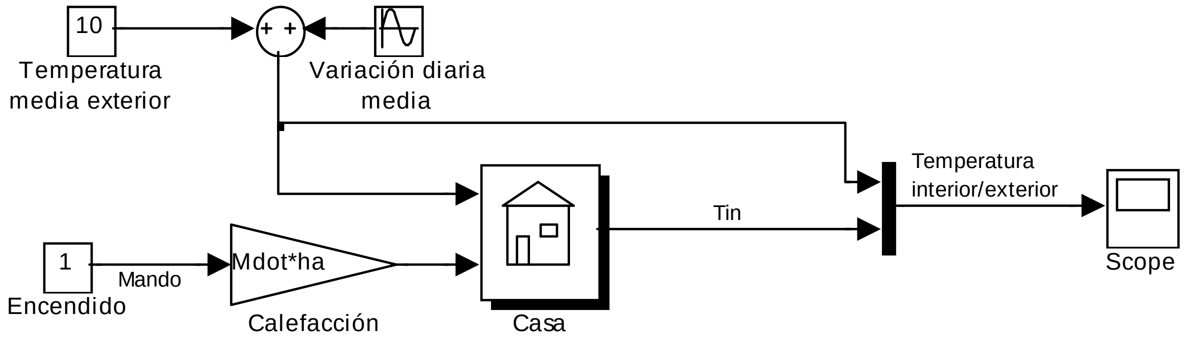


Inconvenientes de la realimentación

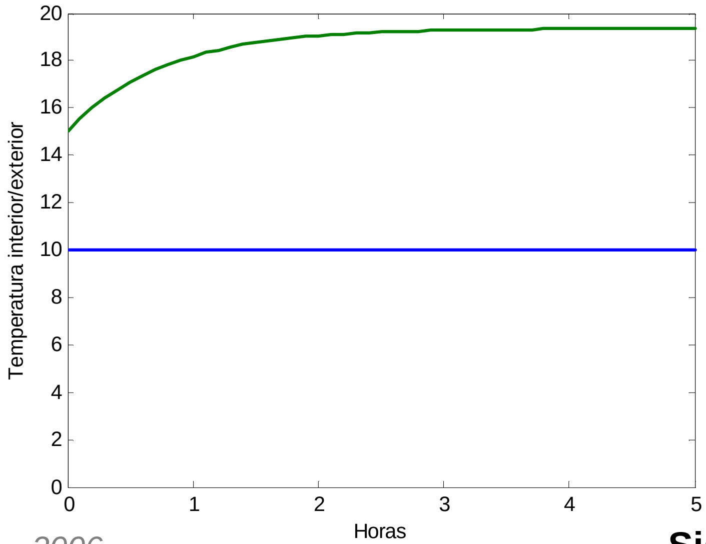
- Generación de posibles inestabilidades
- Necesidad de sensores
- Introducción de ruidos
- Complejidad adicional

Control todo-nada

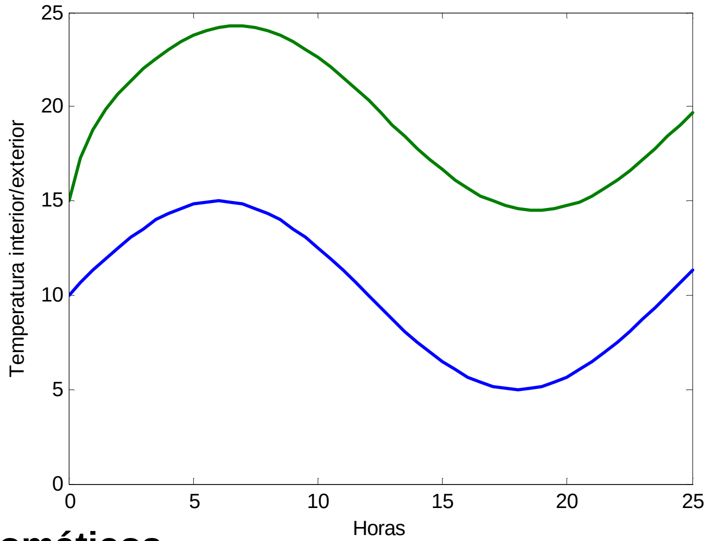
Cadena abierta



t_{ext} cte

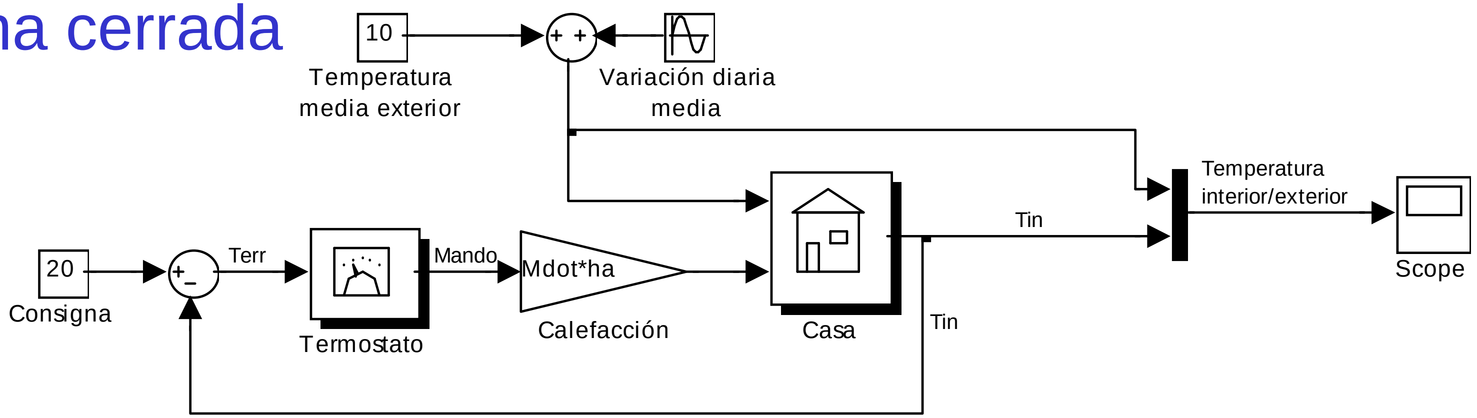


t_{ext} variable



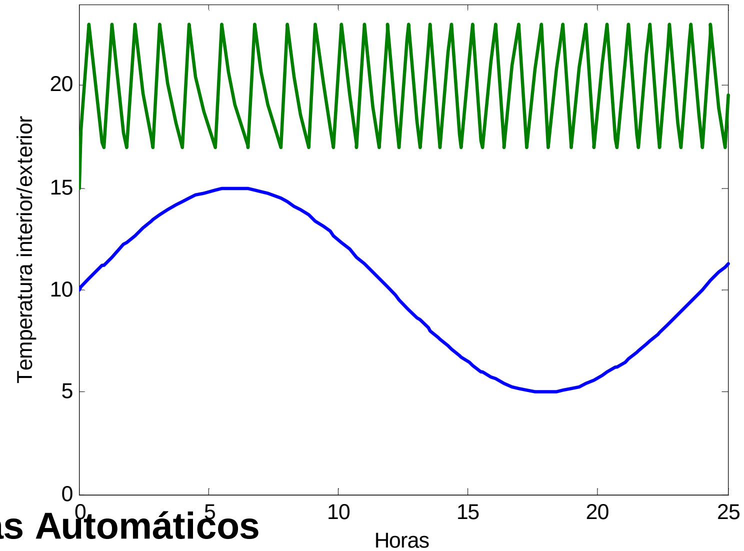
Control todo-nada

Cadena cerrada



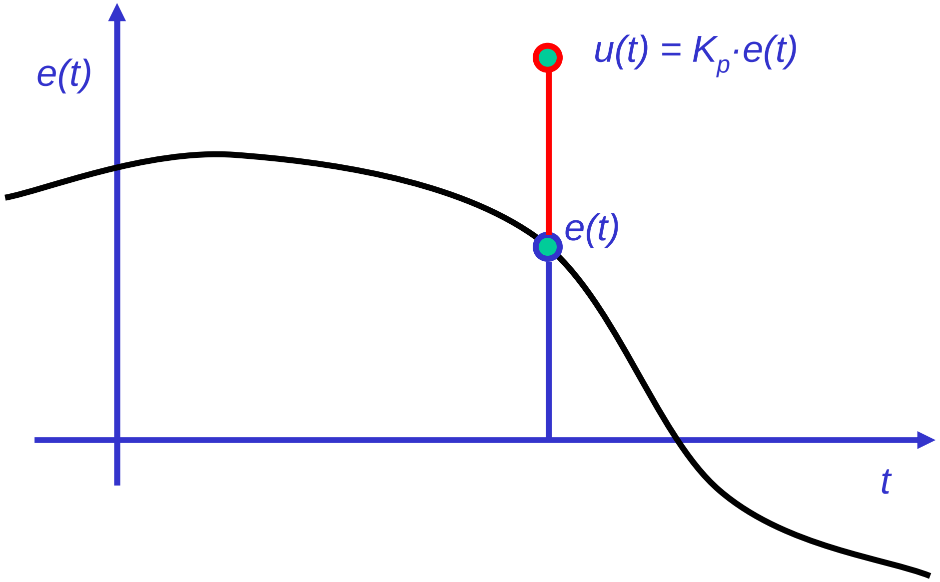
Parámetros de ajuste:

- Acciones de control: umax, umin
- Histéresis

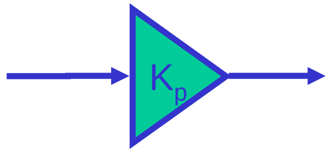


Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional (P)



$$u(s) = K_p \cdot e(s)$$

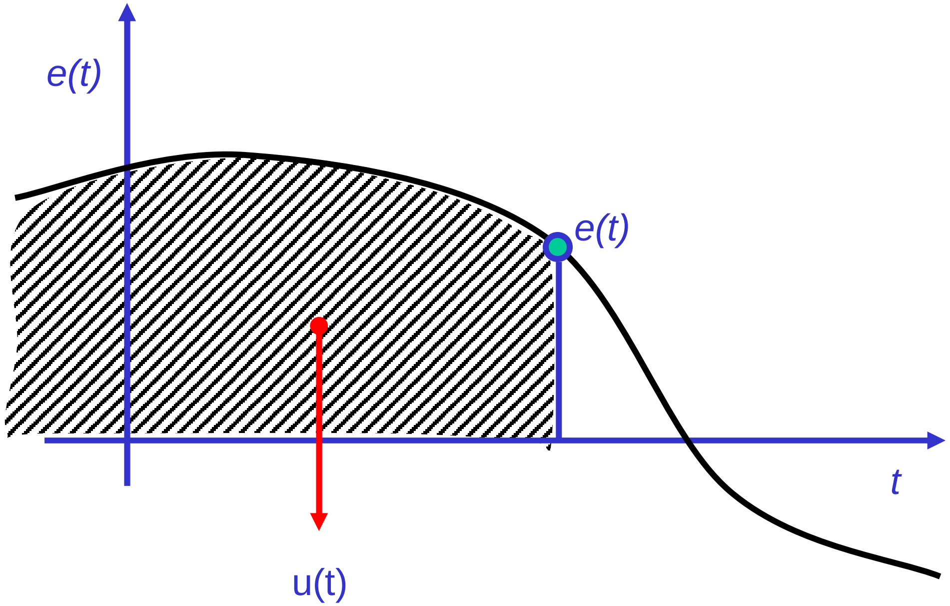


Propiedades

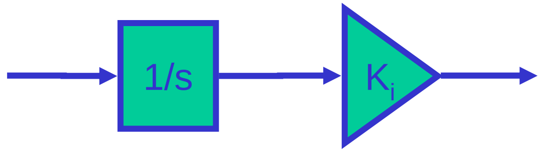
- La acción de control es directamente proporcional al error e(t) cometido
- Esta acción surte efecto de forma instantánea a la aparición del error
- Reduce el error, tanto en seguimiento de referencias como el originado por perturbaciones, pero no lo anula en régimen permanente
- Valores elevados de Kp originan menos error y respuestas más rápidas, aunque una acción P excesiva pueden producir respuestas sobreoscildas o incluso inestables

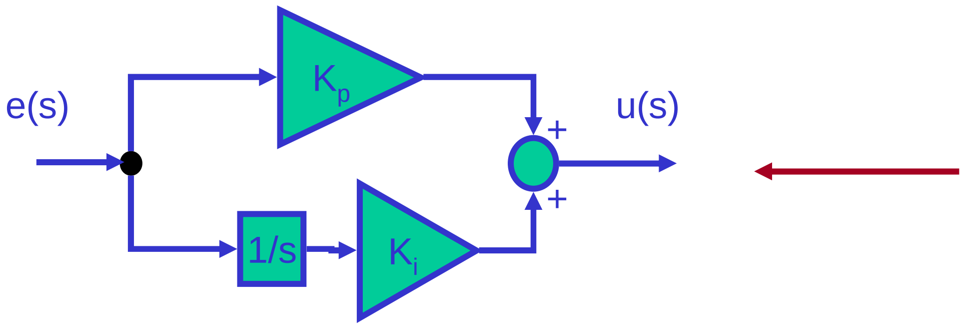
Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional-Integral (PI)



$u(s) = K_i \cdot (1/s)\ e(s)$



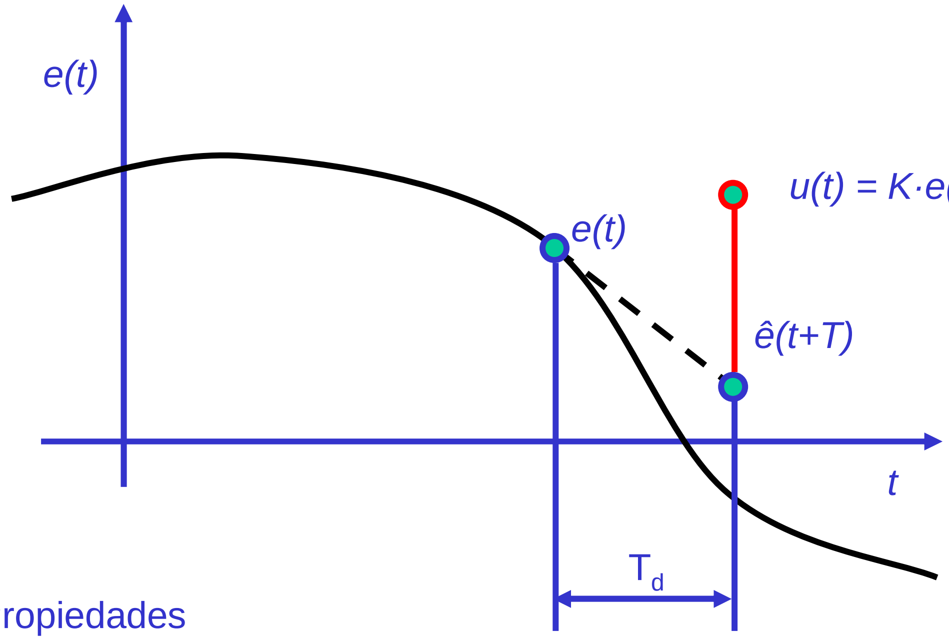


Propiedades

- Se basa en la integral del error
- Mientras el error persiste en régimen permanente, la acción de control se incrementa (el integrador sigue integrando)
- En régimen permanente, el error se hace cero (si no, tendríamos un sistema inestable)
- La acción se basa en la “historia” del error, por tanto conlleva cierto retraso (no confundir con retraso puro)
- Este retraso origina dinámicas lentas, más oscilatorias y a veces inestabilidad
- La acción integral siempre suele ir acompañada de una acción proporcional (K_p) → ACCIÓN Proporcional-Integral (PI)

Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional-Diferencial (PD)



$$u(t) = K\cdot\hat{e}(t+T_d) = e(t) + T_d\cdot de/dt$$

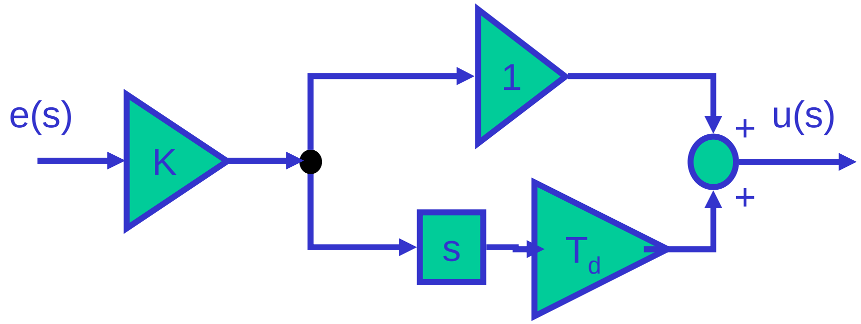
parte proporcional — parte diferencial

$$u(s) = K\cdot[e(s) + T_d\cdot s\ e(s)] = K(1+T_d s)e(s)$$

parte proporcional — parte diferencial

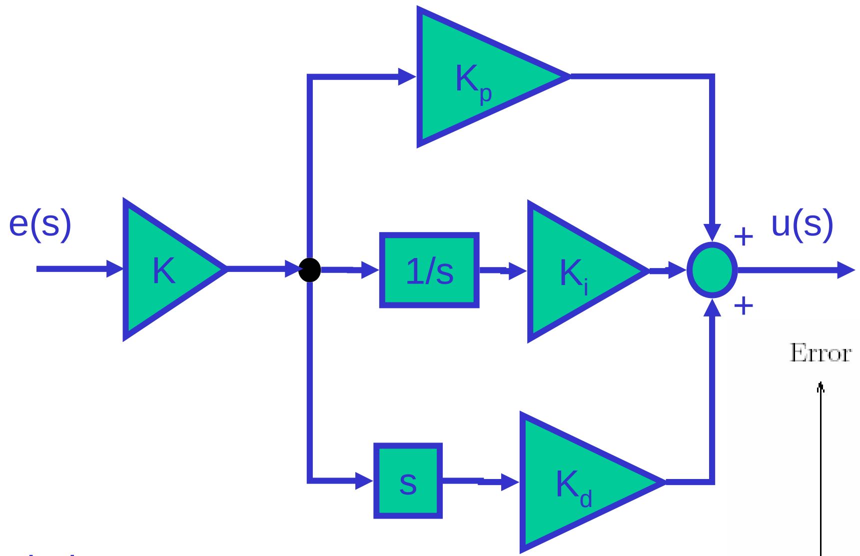
Propiedades

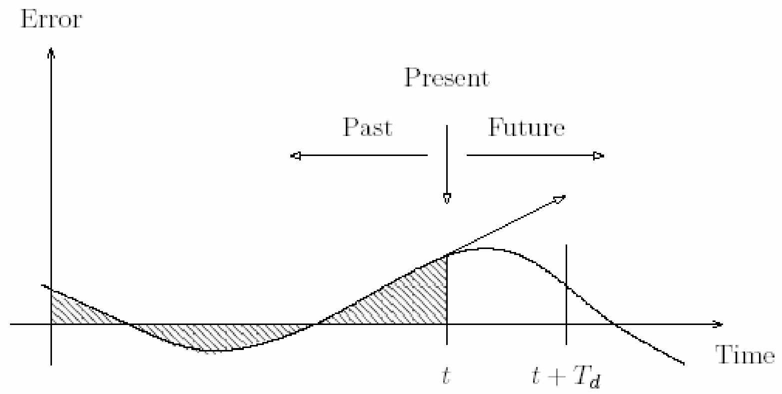
- Se basa en la predicción lineal del valor del error dentro de T_d segundos → es ANTICIPATIVA
- Esta predicción se basa en la pendiente del error (derivada)
- Su carácter anticipativo hace que, en general, mejore la dinámica de la respuesta



Análisis de las acciones P, PI, PD

Acción Proporcional-Integral-Diferencial (PID)



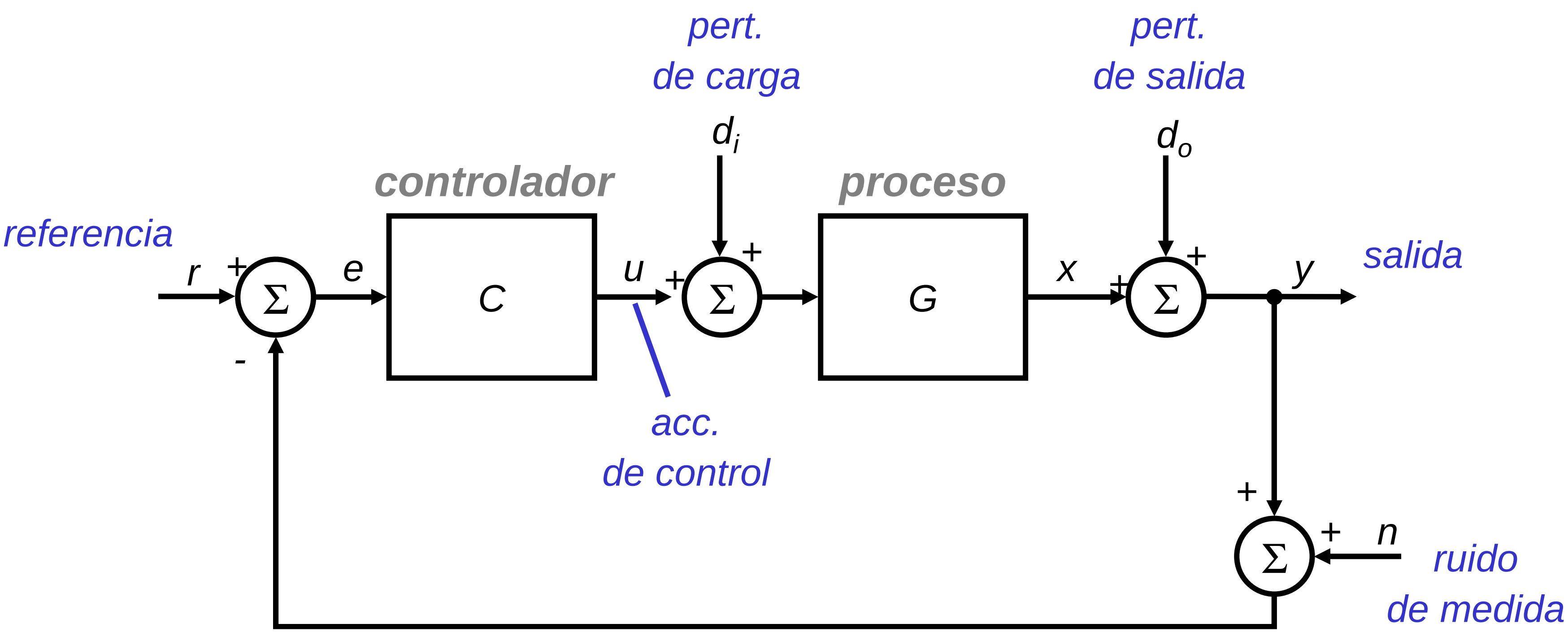


Propiedades

- Combina las tres acciones
- Bien diseñado puede reunir las ventajas de las tres
- Las tres acciones básicas P, PI, PD, son casos particulares de ésta
- La gran mayoría de los reguladores utilizados en la industria son PID's

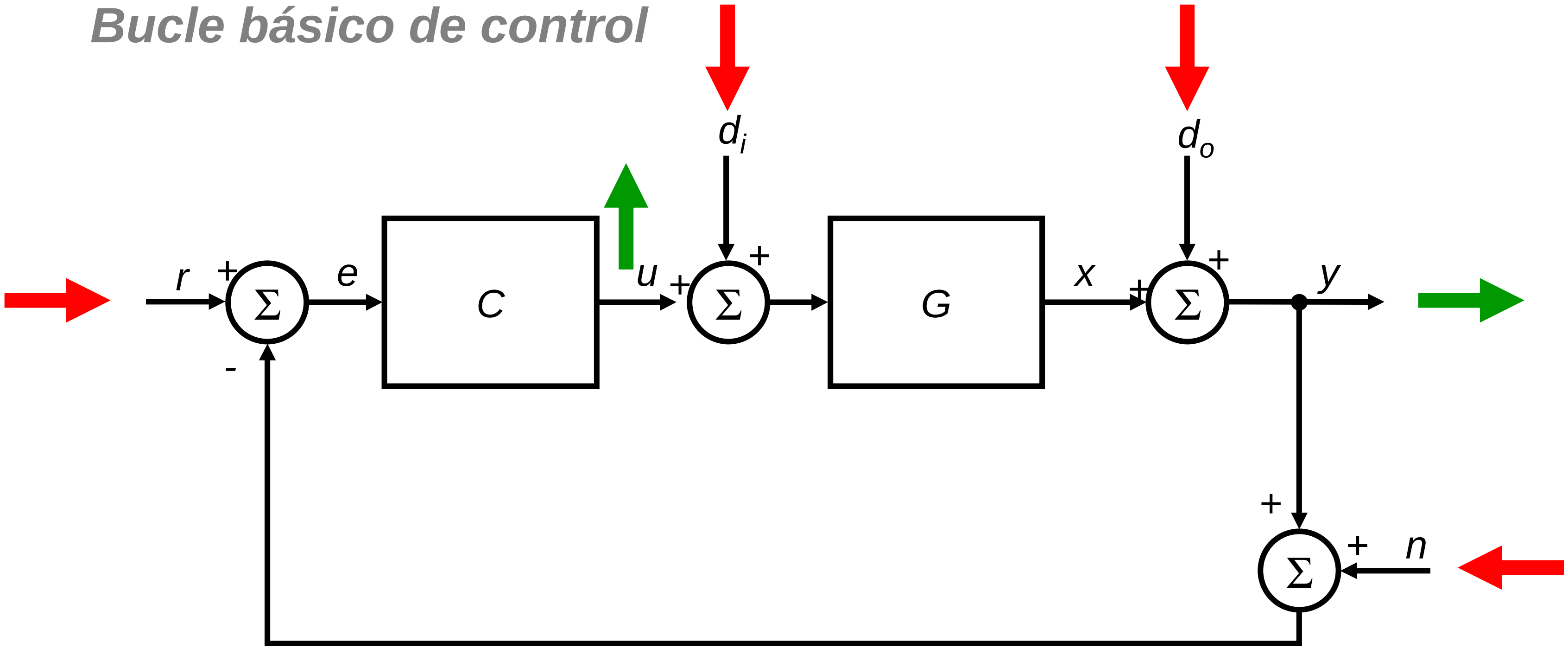
Funciones de sensibilidad

Bucle básico de control



Funciones de sensibilidad

Bucle básico de control

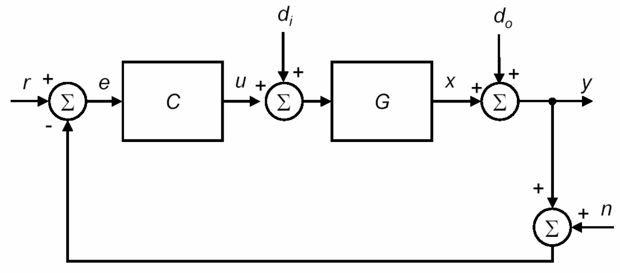


$$Y = \frac{GC}{1+GC}R + \frac{G}{1+GC}D_i + \frac{1}{1+GC}D_o - \frac{GC}{1+GC}N$$

$$U = \frac{C}{1+GC}R - \frac{GC}{1+GC}D_i - \frac{C}{1+GC}D_o - \frac{C}{1+GC}N$$

Funciones de sensibilidad

Las 4 funciones de sensibilidad



$$
\begin{aligned}
Y &= \frac{GC}{1+GC}R + \frac{G}{1+GC}D_i + \frac{1}{1+GC}D_o - \frac{GC}{1+GC}N \\
U &= \frac{C}{1+GC}R - \frac{GC}{1+GC}D_i - \frac{C}{1+GC}D_o - \frac{C}{1+GC}N
\end{aligned}
$$

$$S(s) = \frac{1}{1+G(s)C(s)}$$ → ***sensibilidad***

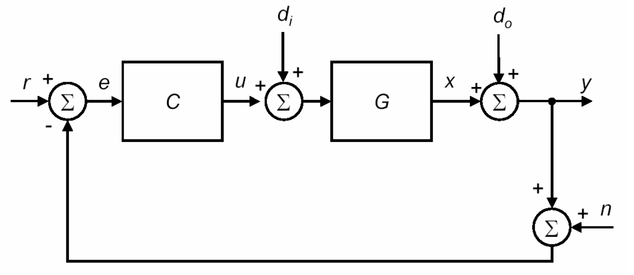
$$T(s) = \frac{G(s)C(s)}{1+G(s)C(s)}$$ → ***sensibilidad complementaria***

$$S_i(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)C(s)}$$ → ***sensibilidad de entrada***

$$S_u(s) = \frac{C(s)}{1+G(s)C(s)}$$ → ***sensibilidad de control***

Funciones de sensibilidad

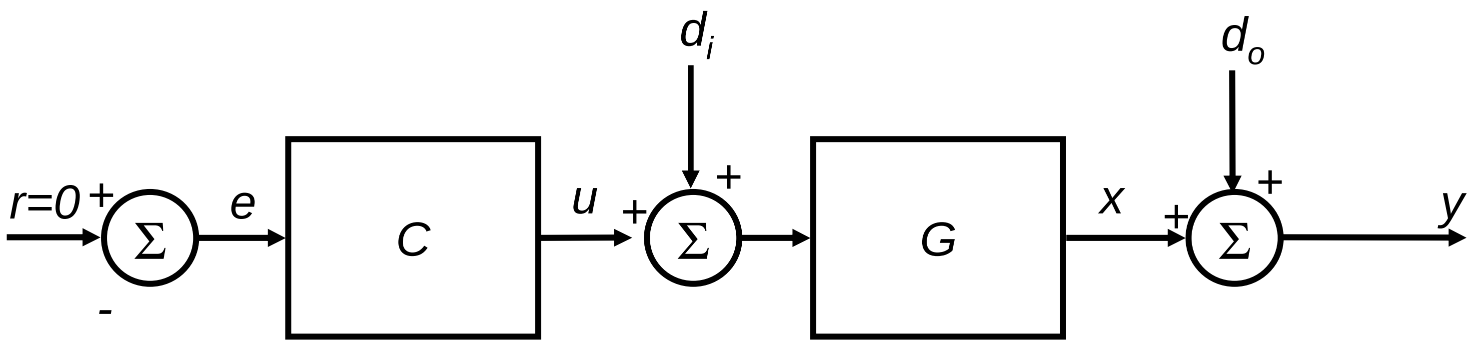
Observaciones



- *El sistema realimentado está caracterizado por 4 funciones de transferencia (S, T, S_u, S_i)*
- *Estas 4 funciones condensan toda la información sobre la respuesta del sistema*
- *Sus propiedades pueden mostrarse mediante su respuesta frecuencial o mediante su respuesta temporal*

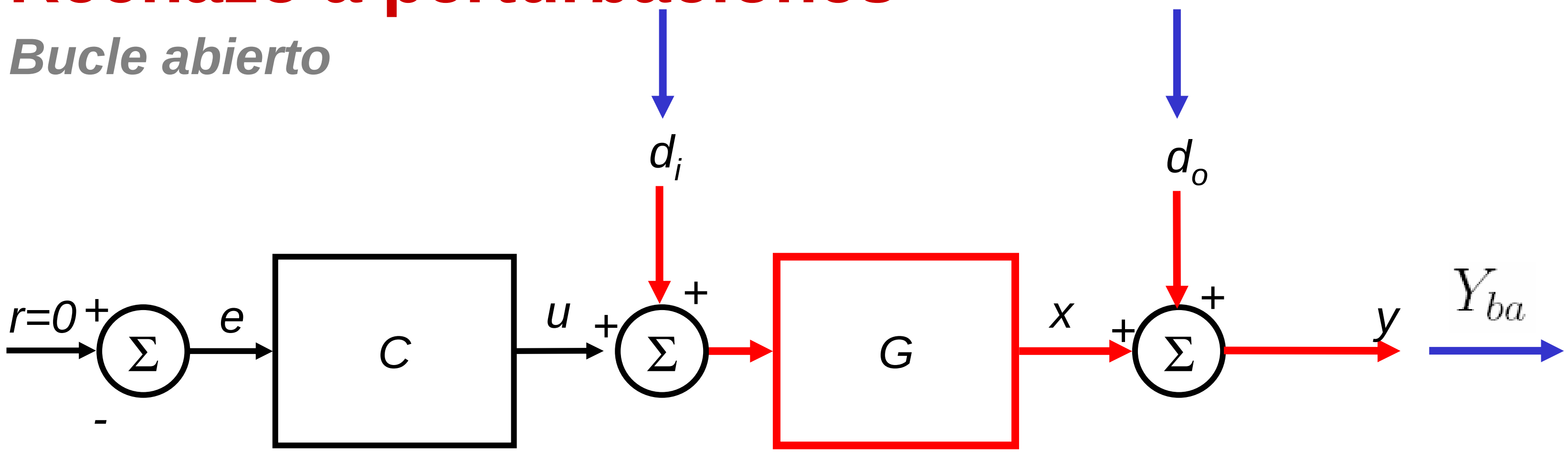
Rechazo a perturbaciones

Bucle abierto



Rechazo a perturbaciones

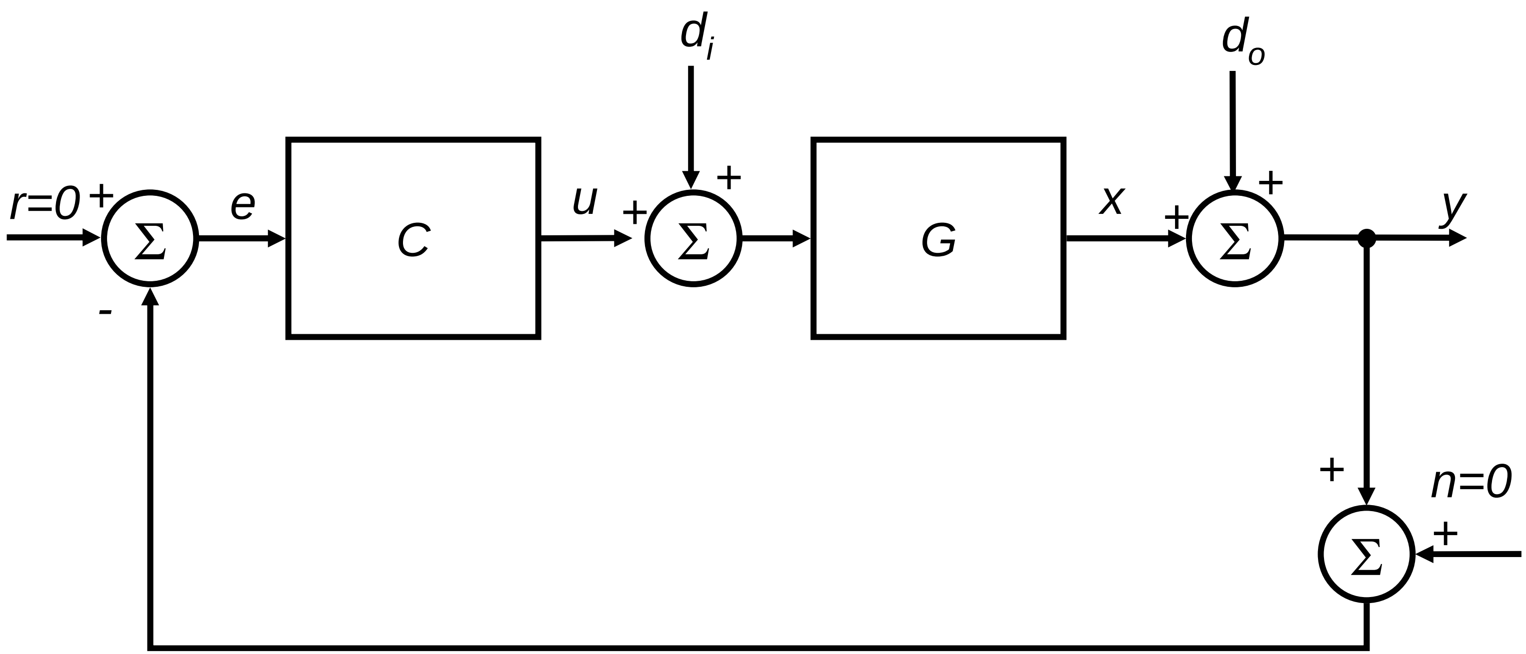
Bucle abierto



$$Y_{ba} = G(s)D_i(s) + D_o(s)$$

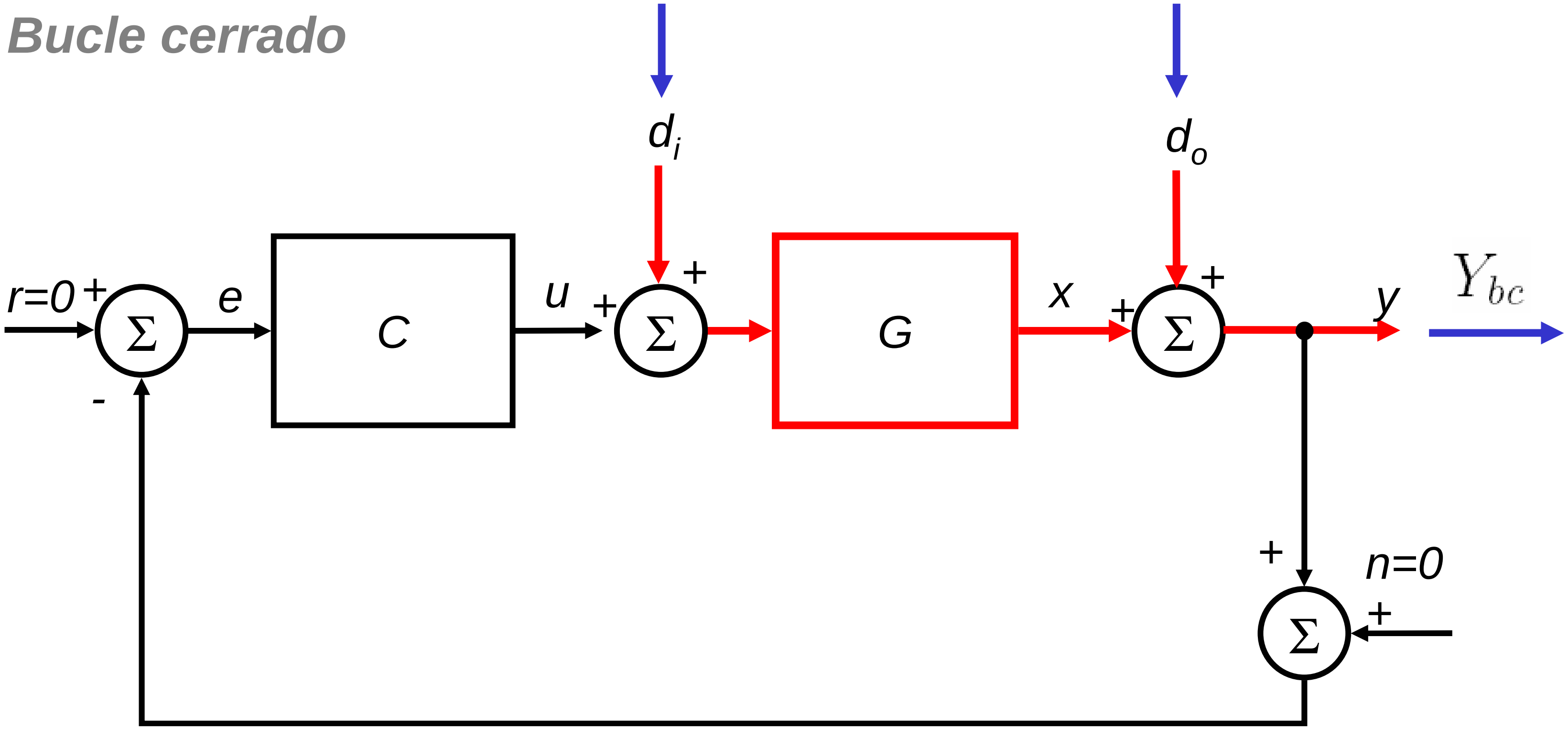
Rechazo a perturbaciones

Bucle cerrado



Rechazo a perturbaciones

Bucle cerrado



$$Y_{bc} = \frac{G(s)D_i(s) + D_o(s)}{1 + G(s)C(s)} = S(s)\left[G(s)D_i(s) + D_o(s)\right]$$

Rechazo a perturbaciones

Interpretación de S(s)

Bucle abierto → $Y_{ba} = G(s)D_i(s) + D_o(s)$

Bucle cerrado → $Y_{bc} = \dfrac{G(s)D_i(s) + D_o(s)}{1 + G(s)C(s)} = S(s)\left[G(s)D_i(s) + D_o(s)\right]$

$$\Downarrow$$

$$Y_{bc} = S(s)Y_{ba}$$

Rechazo a perturbaciones

Interpretación de S(s)

$$Y_{bc} = S(s) Y_{ba}$$

- *La función de sensibilidad describe la atenuación en las perturbaciones que proporciona la realimentación*
- *La realimentación atenúa perturbaciones a frecuencias en las que $|S(jw)|<1$*
- *La realimentación amplifica perturbaciones a frecuencias en las que $|S(jw)|>1$*

Rechazo a perturbaciones

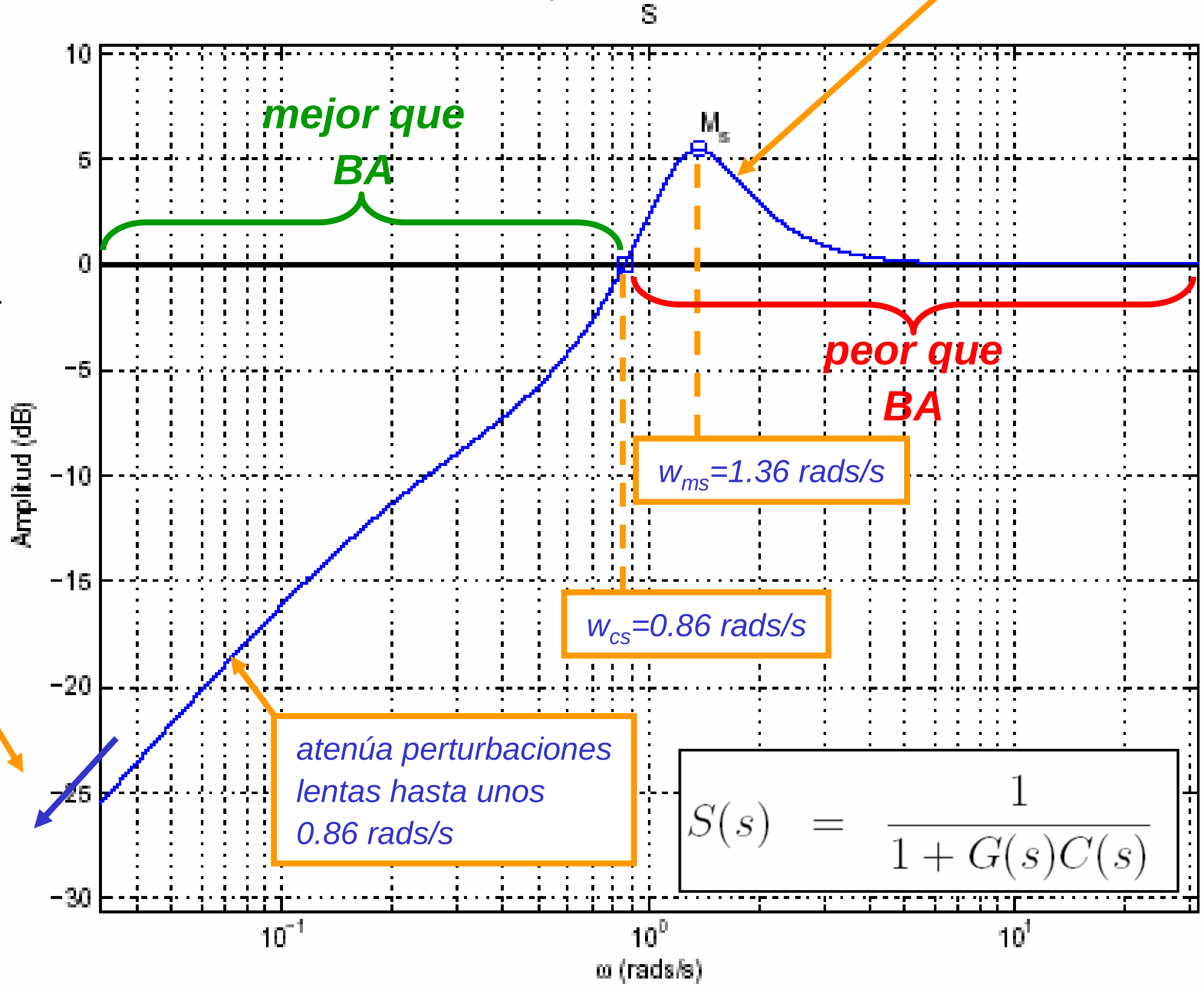
Interpretación de S(s). Regulador PI (k_p=1, k_i=0.5)

se muestra especialmente sensible ante perturbaciones a ciertas frecuencias

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}$$

$$G(s) = \frac{4}{(s+1)^2(s+2)}$$

bloquea las perturbaciones en continua (reg. perm)



Rechazo a perturbaciones

Interpretación de S(s)

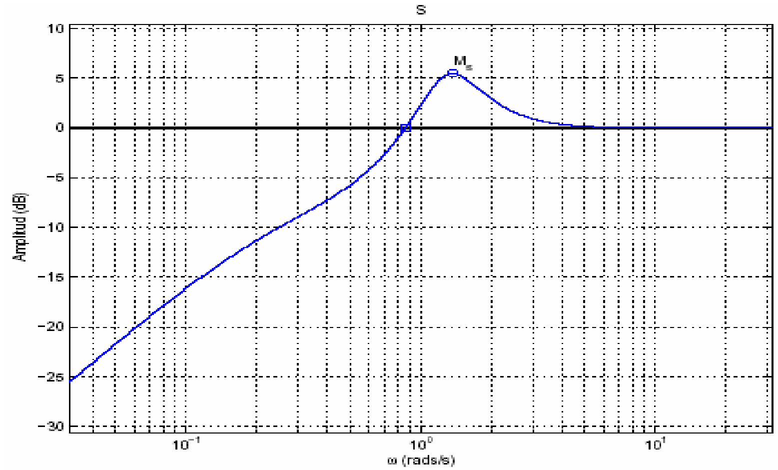
- *S(s) describe cuánto atenúa la realimentación las perturbaciones en comparación con bucle abierto*

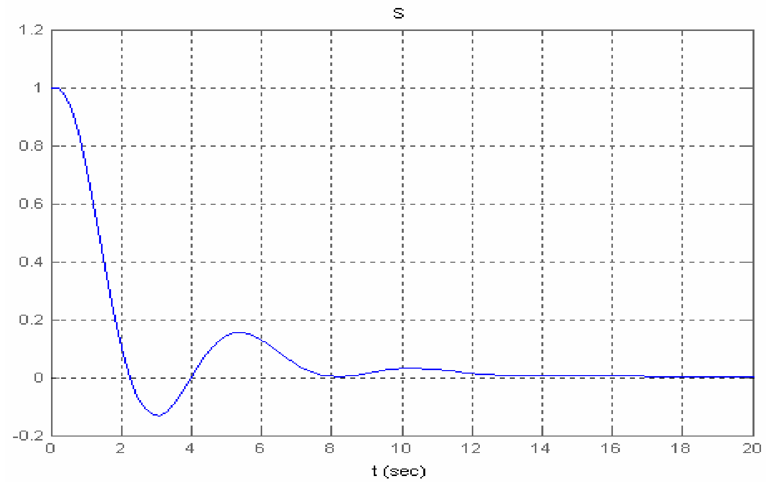
- *permite dar esa información en frecuencia (frecuencias vulnerables, frecuencias robustas ...)*

- *Puede también representarse en el tiempo*

- *informa también sobre:*
  - *Estabilidad relativa*
  - *Robustez*
  - *etc.*

(a continuación...)





Estabilidad y sensibilidad

Los márgenes clásicos pueden establecerse en términos de α_1 y α_2

$$\mathrm{MG} = \frac{1}{1-\alpha_1}, \qquad \mathrm{MF} = 2\arcsin\frac{\alpha_2}{2}$$

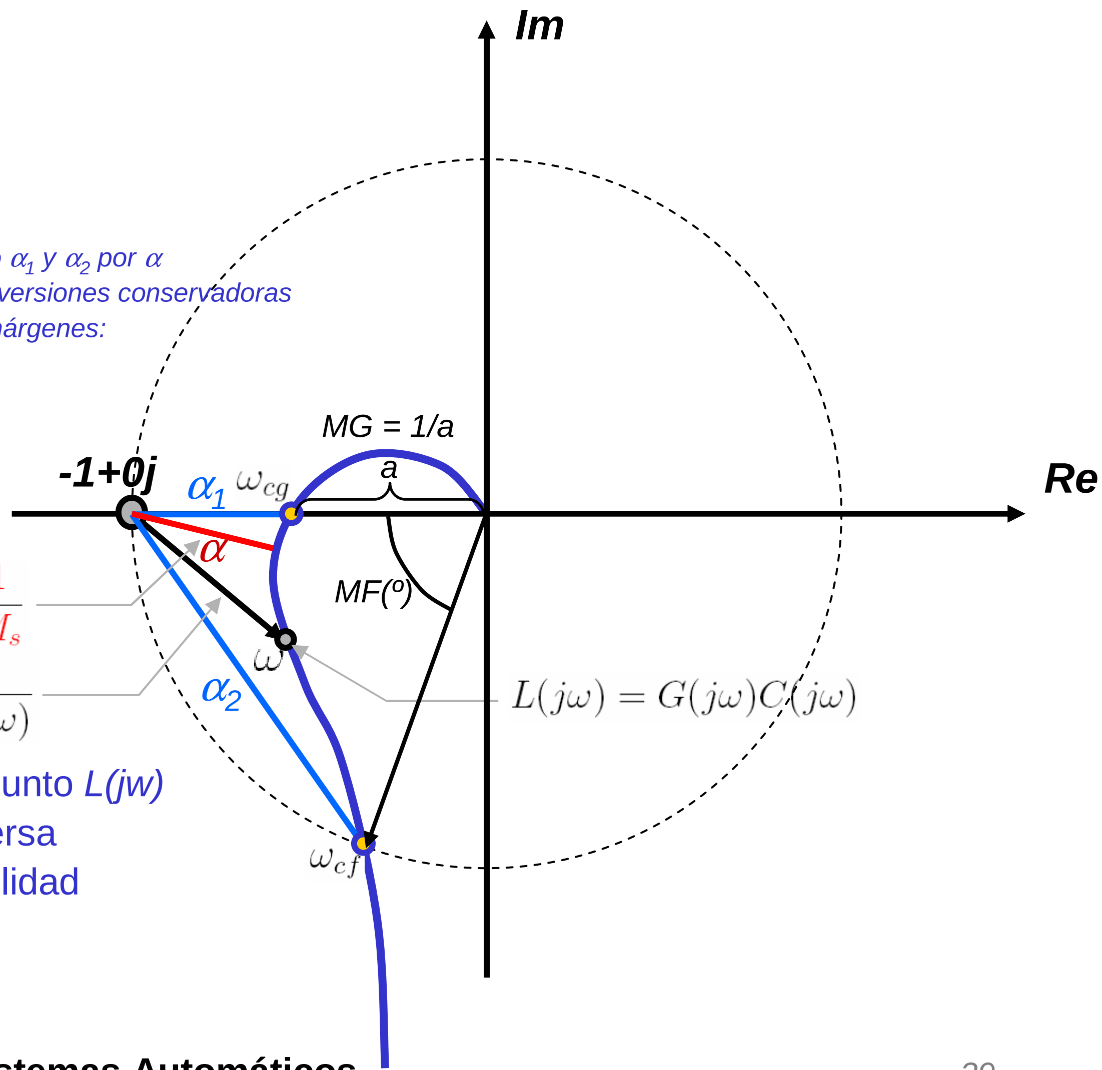
$$\alpha$$

sustituyendo α_1 y α_2 por α se obtienen versiones conservadoras de los dos márgenes:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{MG}^* &= \frac{1}{1-\alpha} \leq \mathrm{MG} \\ \mathrm{MF}^* &= 2\arcsin\frac{\alpha}{2} \leq \mathrm{MF} \end{aligned}}$$

punto de distancia mínima: $M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)|, \qquad \alpha = \frac{1}{M_s}$

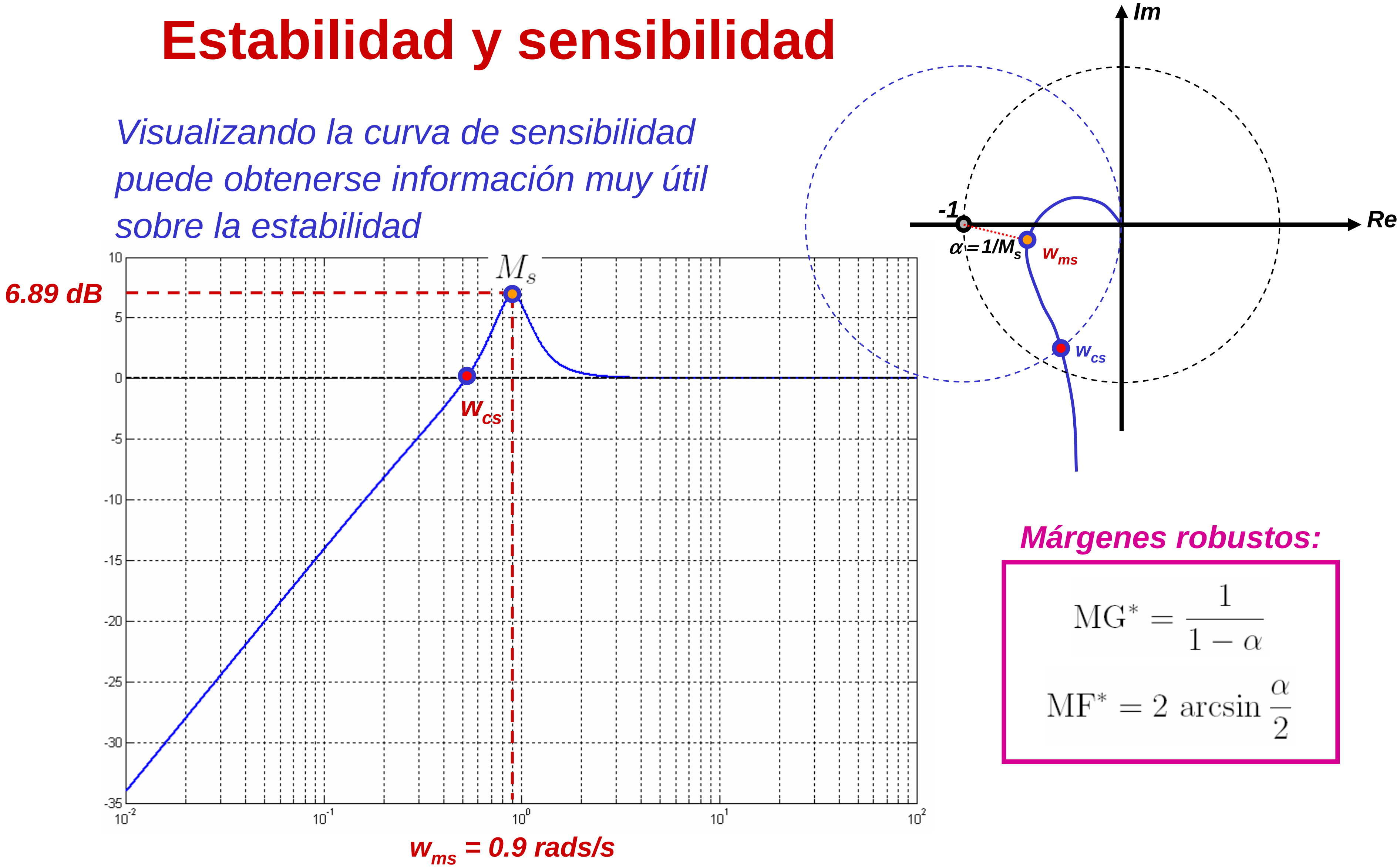
$$1 + L(j\omega) = \frac{1}{S(j\omega)}$$



La distancia del punto –1 al punto *L(jw)*
es precisamente la inversa
del módulo de la sensibilidad

Estabilidad y sensibilidad

Visualizando la curva de sensibilidad puede obtenerse información muy útil sobre la estabilidad



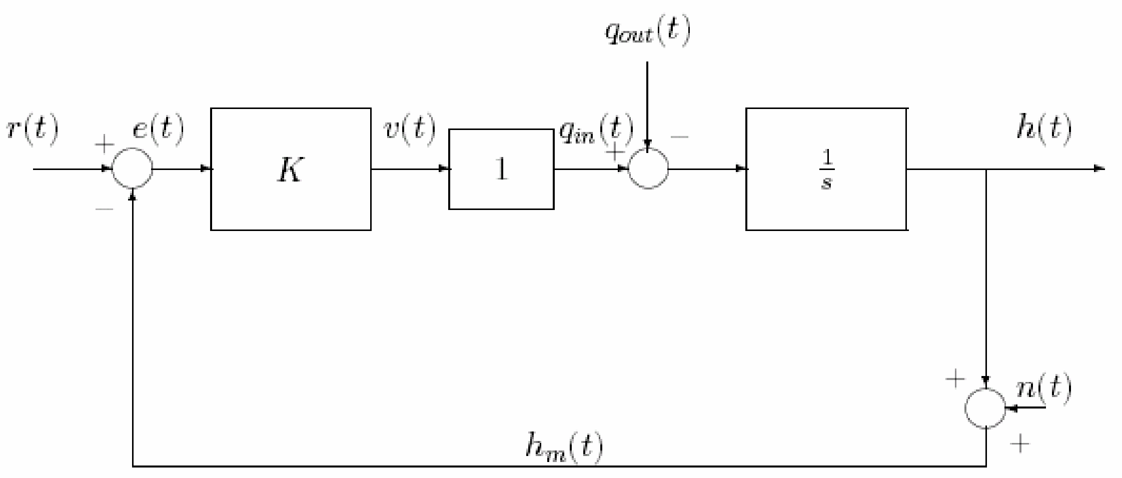
Márgenes robustos:

$$\mathrm{MG}^* = \frac{1}{1-\alpha}$$

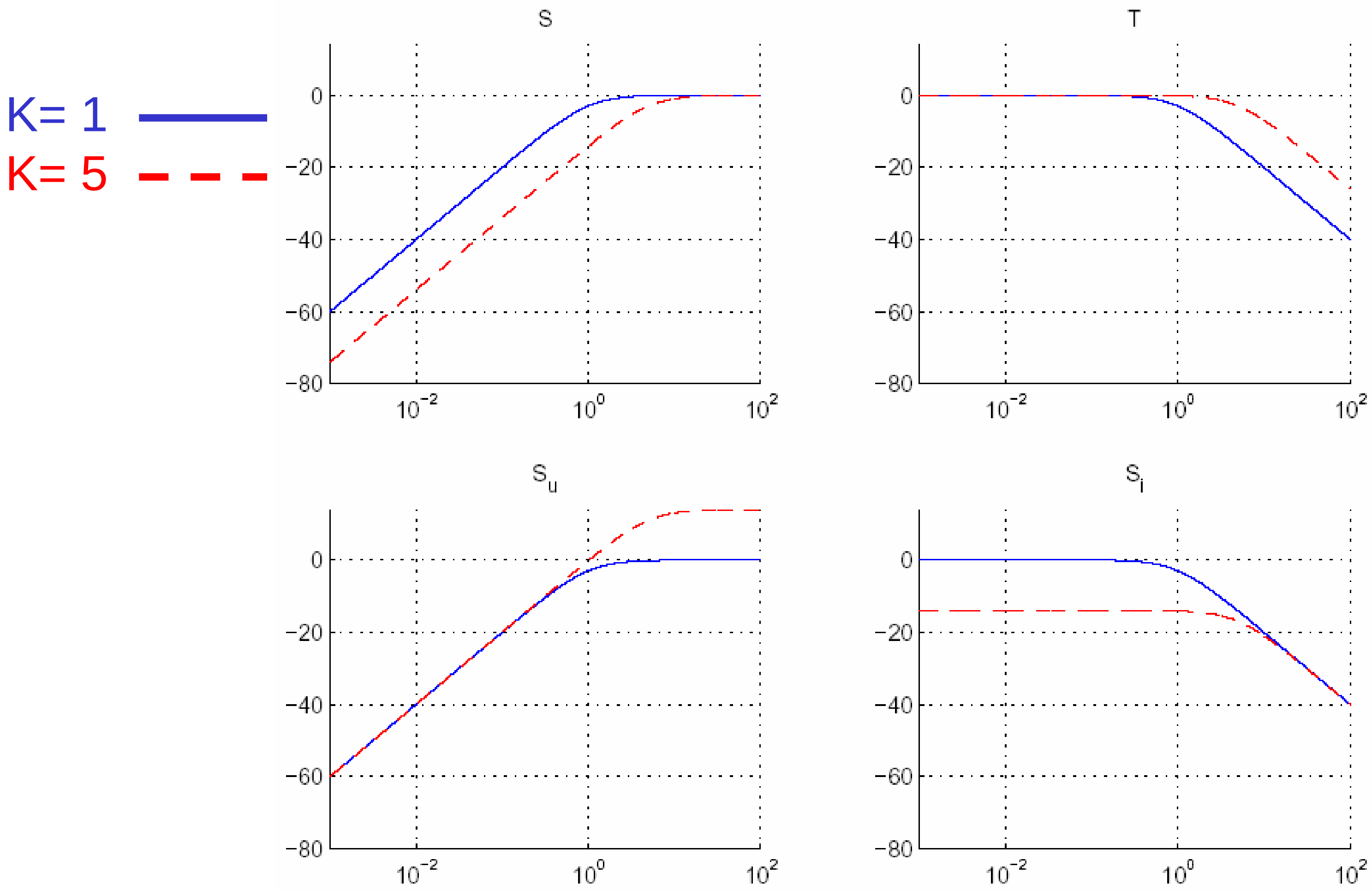
$$\mathrm{MF}^* = 2\,\arcsin\frac{\alpha}{2}$$

Ej: Colada continua

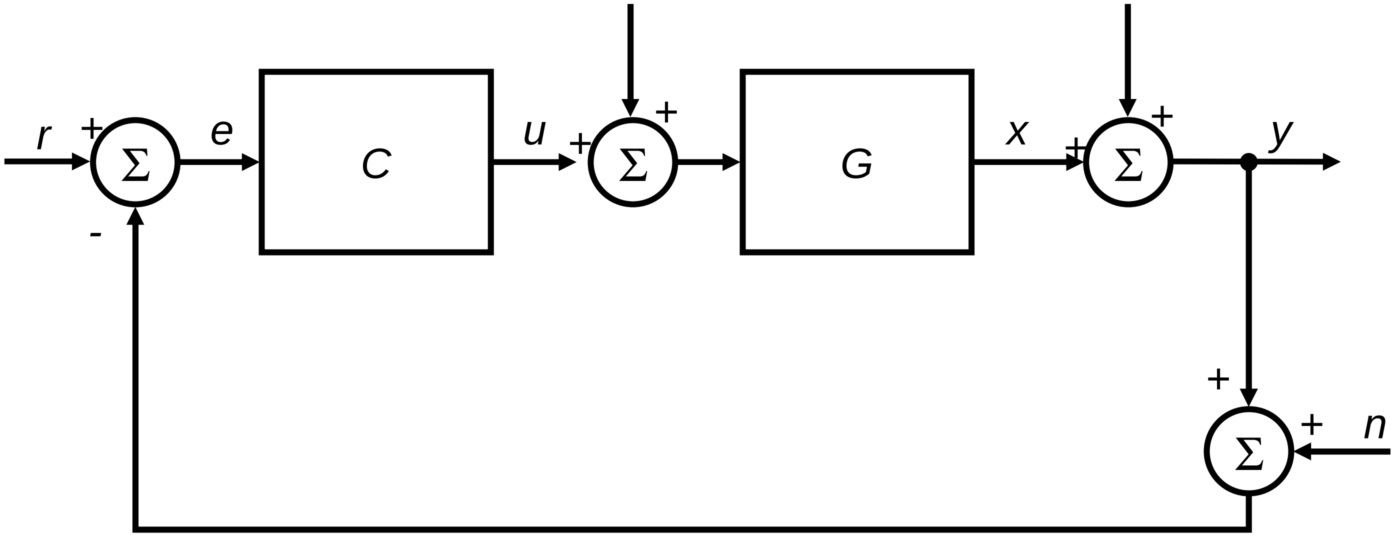
$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{1+CP} = \frac{1}{1+K/s} = \frac{s}{s+K} \\
T &= \frac{CP}{1+CP} = \frac{K/s}{1+K/s} = \frac{K}{s+K} \\
S_u &= \frac{C}{1+CP} = \frac{Ks}{s+K} \\
S_i &= \frac{P}{1+CP} = \frac{1}{s+K}
\end{aligned}
$$



Ej: Colada continua



Ej: Análisis de las acciones P, PI, PD



Controlador:

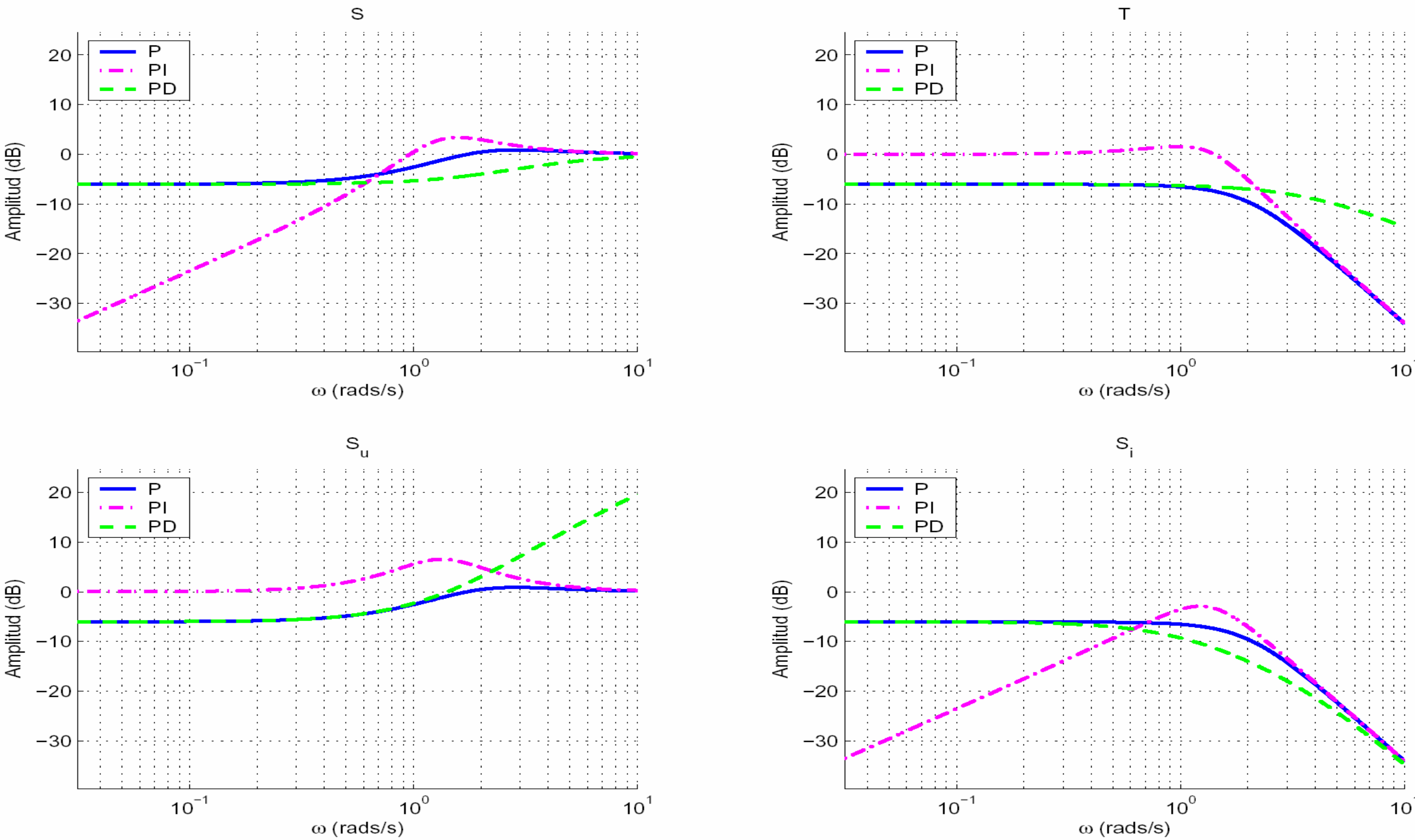
$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

Proceso:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

Tipo de control	Parámetros $\{k_p, k_i, k_d\}$
proporcional (P):	$\{1, 0, 0\}$
proporcional-integral (PI):	$\{1, 1.5, 0\}$
proporcional-diferencial (PD):	$\{1, 0, 1\}$

Ej: Análisis de las acciones P, PI, PD



Referencias

[Franklin02] Franklin, G.F. et al. **Tema 4** de "*Feedback Control of Dynamic Systems*", 4ª edición, Prentice-Hall, 2002.

[Asmur05] Astrom, K.J., Murray R.M. **Tema 1** de "*Feedback Systems*"

http://www.cds.caltech.edu/~murray/books/AM05/pdf/am05-intro_14jan06.pdf

[Astrom02] Astrom, K.J. **Tema 5** de "*Control System Design. Lecture Notes for ME 155A*"

http://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds101/fa02/caltech/astrom-ch5.pdf