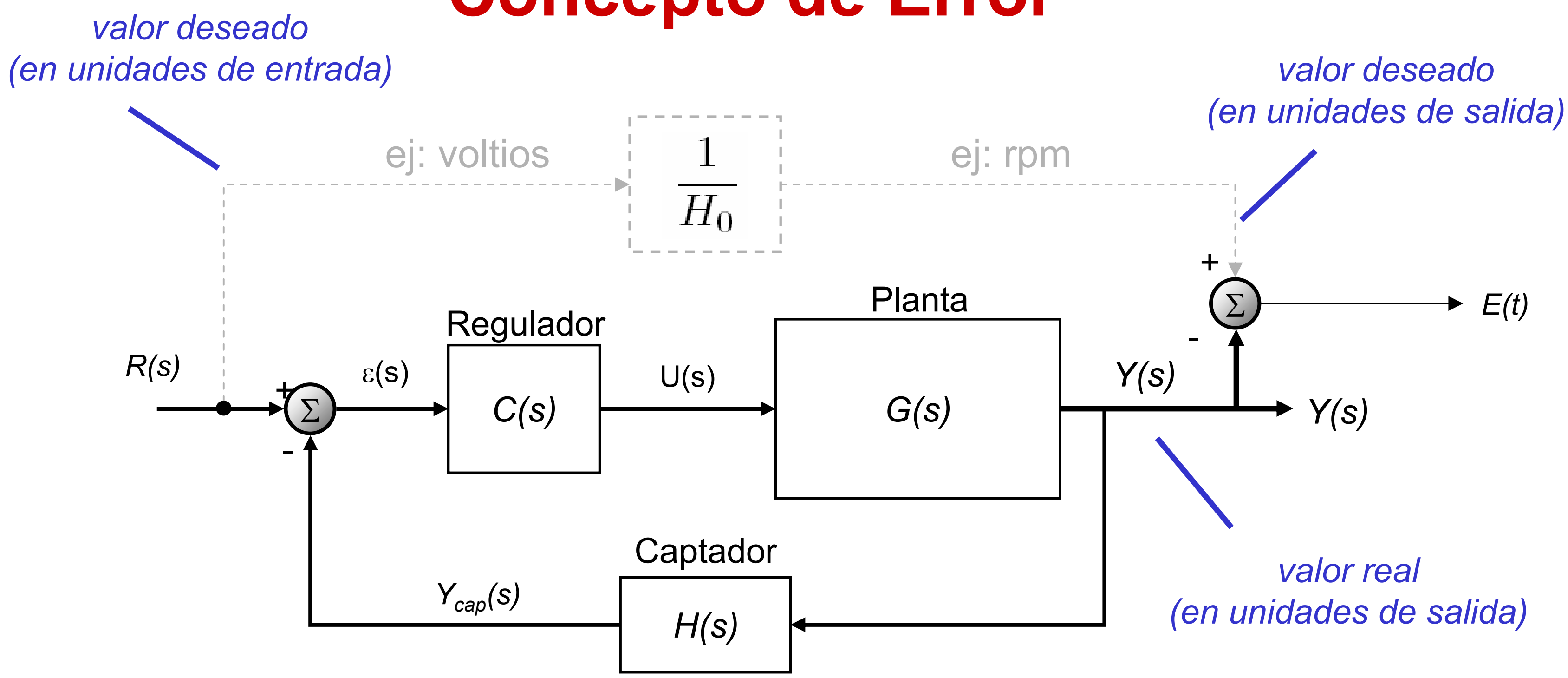
Errores

Tema 4

Índice

- Concepto de error
- Clasificación de los errores
- Error en régimen permanente
- Tipo de un sistema
- Tipo frente a perturbaciones
- Ejemplos

Concepto de Error



El error es la diferencia entre
la salida deseada y la salida real

$$E(t) = y_{\text{deseada}}(t) - y_{\text{real}}(t)$$

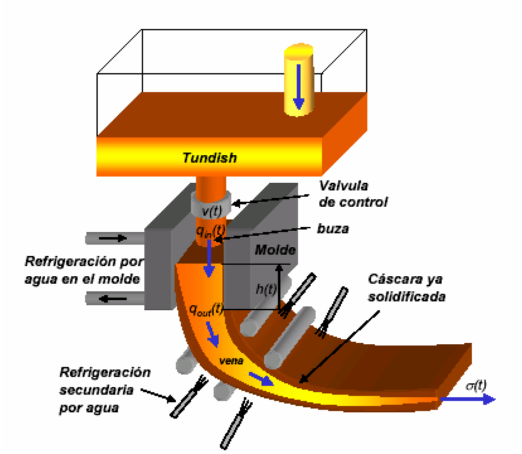
El error suele venir dado
<u>en "por unidad" (p.u.) o en porcentaje (%)</u>
respecto a la magnitud
de la referencia o perturbación que lo causa

Clasificación de los errores

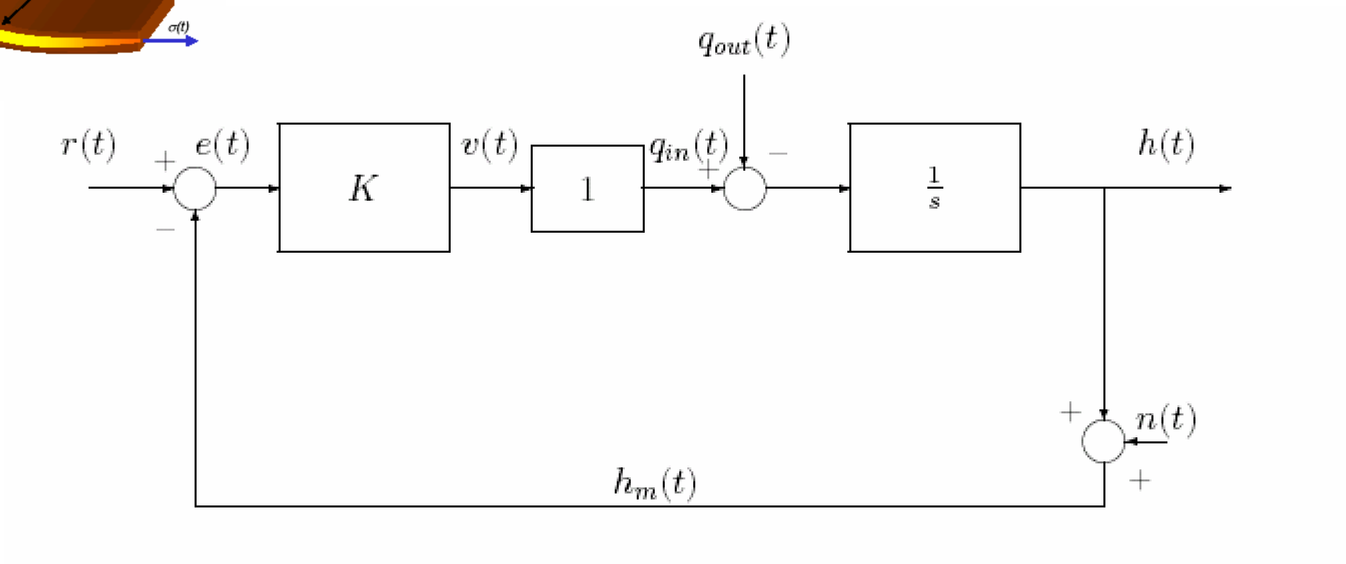
- En función de la variable
  - *referencia*
  - *perturbación de entrada*
  - *perturbación de salida*
  - *ruido en el sensor*

- En función de la dinámica de la variable
  - *escalón (error de posición)*
  - *rampa (error de velocidad)*
  - *parábola (error de aceleración)*
  - *senoide*

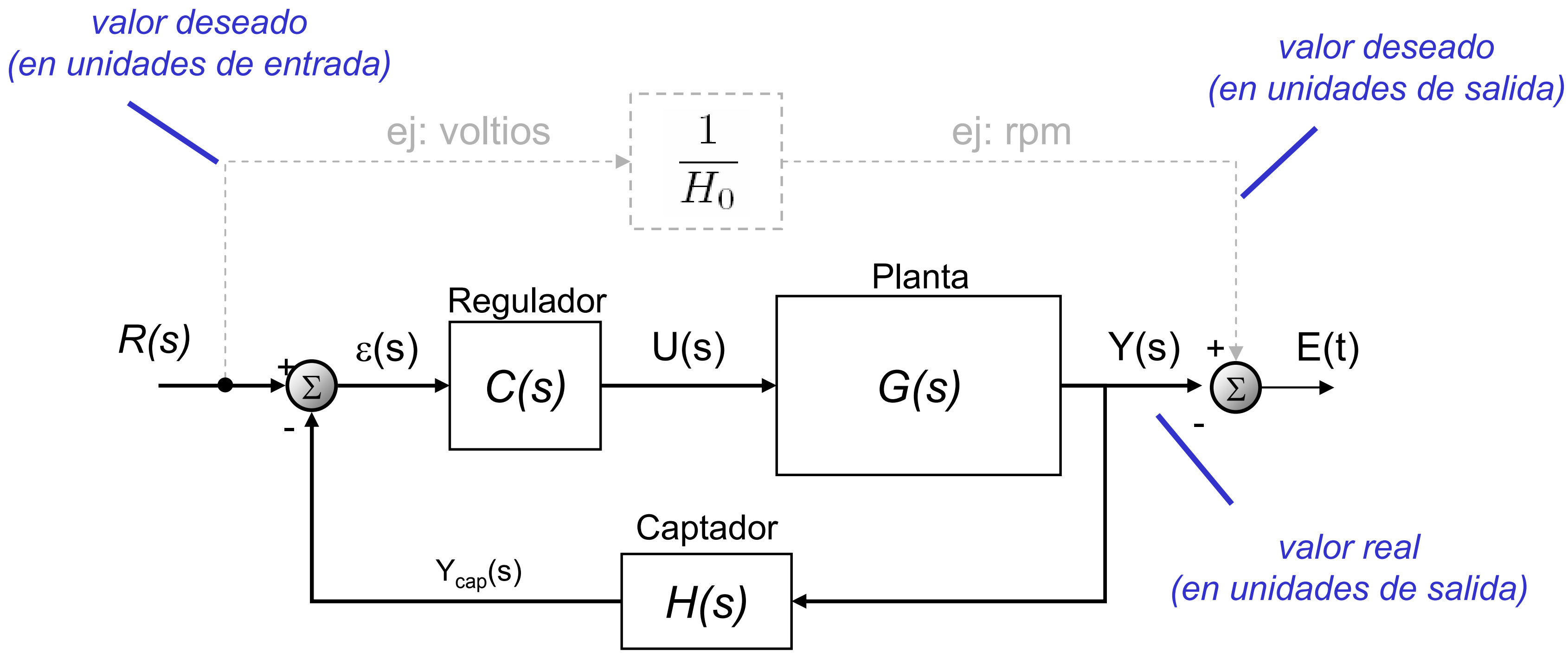
Ej: Colada continua



- Mantenimiento de la referencia
- Efecto de la velocidad de colada
- Ruido en el sensor



Error de Seguimiento de Referencias



Error en régimen permanente:

$$e_{rp} = \lim_{s\to 0} s \cdot R(s) \cdot \left(\frac{1}{H_0} - \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)H(s)}\right) \longrightarrow$$

error expresado en unidades de salida

$$e_{rp}^{pu} = e_{rp} \cdot H(0) = \lim_{s\to 0} s \cdot R(s) \cdot \left(1 - \frac{C(s)G(s)H(0)}{1+C(s)G(s)H(s)}\right) \longrightarrow$$

error expresado en unidades de entrada (p.u.)

Error de Seguimiento de Referencias

Captador instantáneo H(s) = H(0)

Si el captador es instantáneo
H(s) = H(0)

$$
\begin{aligned}
e_{rp}^{pu} = e_{rp} \cdot H(0) \quad &= \\
&= \lim_{s \to 0} s \cdot R(s) \cdot \left(1 - \overbrace{\frac{C(s)G(s)H(0)}{1 + C(s)G(s)H(0)}}^{T(s)}\right) = \\
&= \lim_{s \to 0} s \cdot R(s) \cdot \left(\underbrace{\frac{1}{1 + C(s)G(s)H(0)}}_{S(s)}\right)
\end{aligned}
$$

Error de Seguimiento de Referencias

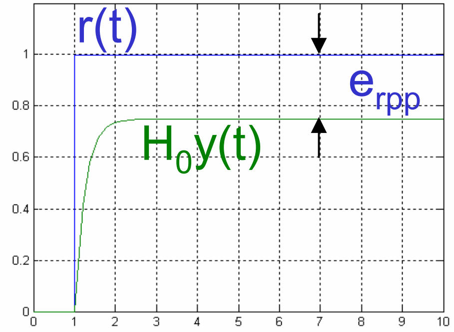
Captador instantáneo H(s) = H(0)

Error de Posición ($R(s)$ = escalón unitario)

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$$e_{rpp} = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot\left(\frac{1}{1+C(s)G(s)H(0)}\right) = \frac{1}{1+K_p}$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} C(s)G(s)H(0) = \lim_{s\to 0} L(s)$$



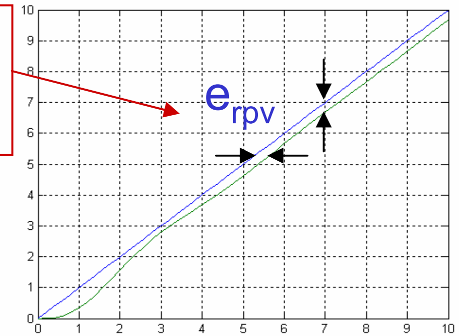
Error de Velocidad ($R(s)$ = rampa unitaria)

$$R(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$e_{rpv} = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s^2}\cdot\left(\frac{1}{1+C(s)G(s)H(0)}\right) = \frac{1}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} s\cdot C(s)G(s)H(0) = \lim_{s\to 0} s\cdot L(s)$$

Con pendiente 1 horiz=vert, luego e_{pv} se puede medir en segundos



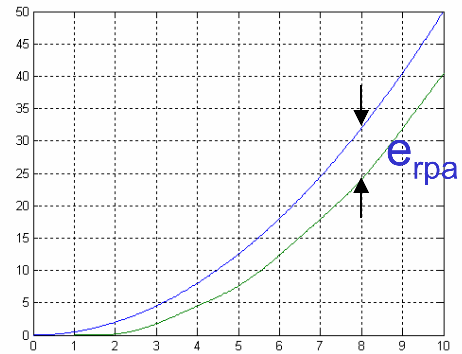
Error de Aceleración ($R(s)$ = parábola unitaria)

$$R(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$e_{rpa} = \lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s^3}\cdot\left(\frac{1}{1+C(s)G(s)H(0)}\right) = \frac{1}{K_a}$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2\cdot C(s)G(s)H(0) = \lim_{s\to 0} s^2\cdot L(s)$$

os



Tipo de un sistema

Definición

Se define **tipo del sistema** como el grado "*k*" de la señal de prueba para el que el error es constante y no nulo

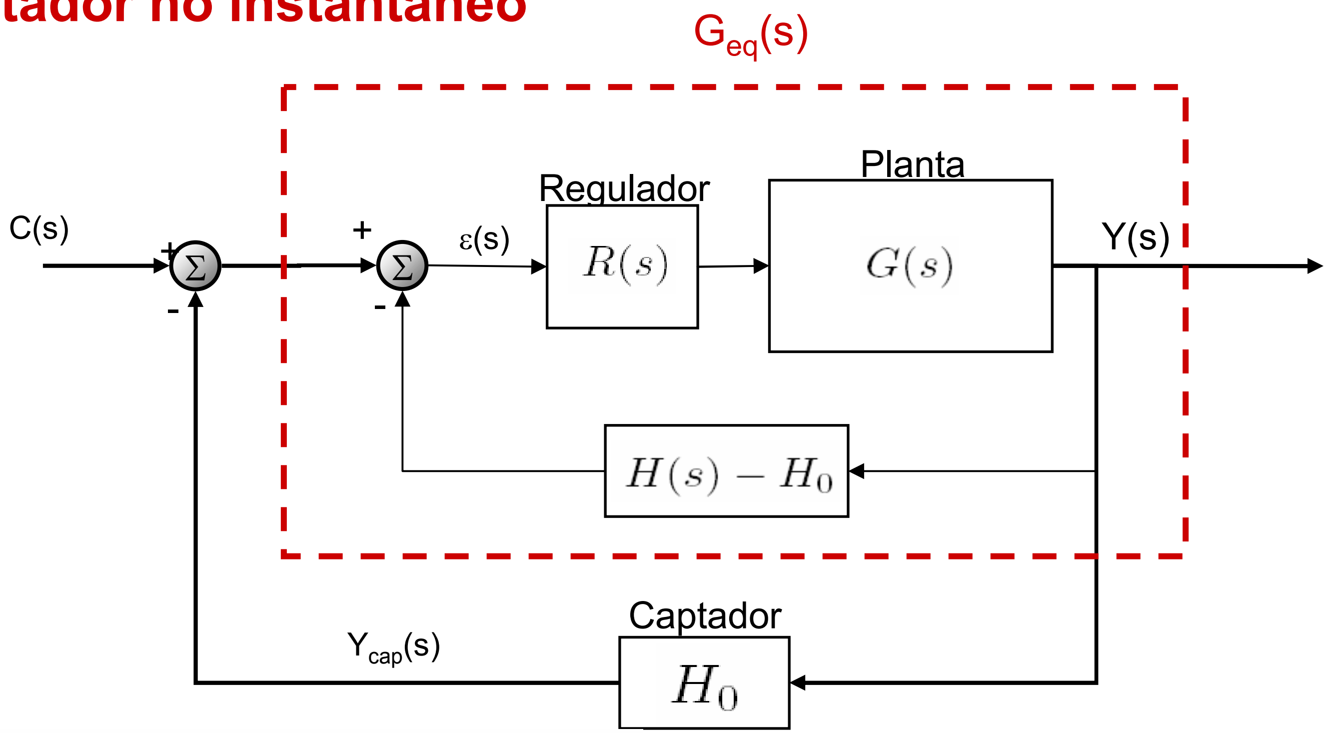
Cuadro de tipos del sistema para H(s) = H_0

Tipo >>	0	1	2	3
e_{rpp}	$\frac{1}{1+K_p}$	0	0	0
e_{rpv}	∞	$\frac{1}{K_v}$	0	0
e_{rpa}	∞	∞	$\frac{1}{K_a}$	0

- El tipo nos permite describir la capacidad del sistema para seguir entradas polinomiales (escalón, rampa, parábola…) sin error
- La ganancia de un sistema puede variar, sin que el sistema cambie de tipo. Lo único que variará es la constante de error correspondiente.
- El tipo puede definirse también con respecto a las perturbaciones

Error en Régimen Permanente

Captador no instantáneo



$$e_{rpp} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{1 + H_0 G_{eq}(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

$$e_{rpv} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{sH_0 G_{eq}(s)} = \frac{1}{K_v}$$

$$e_{rpa} = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 H_0 G_{eq}(s)} = \frac{1}{K_a}$$

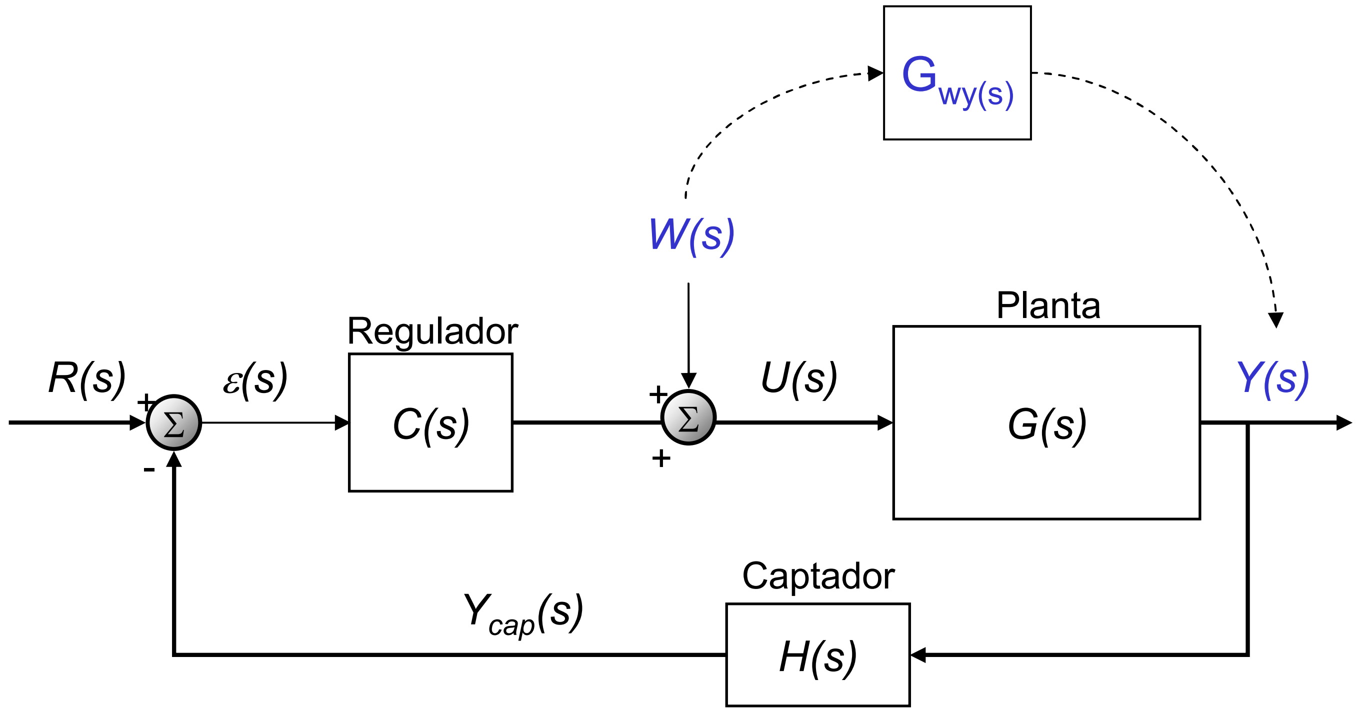
donde,

$$K_p = \lim_{s\to 0} H_0 G_{eq}(s)$$

$$K_v = \lim_{s\to 0} sH_0 G_{eq}(s)$$

$$K_a = \lim_{s\to 0} s^2 H_0 G_{eq}(s)$$

Tipo de un sistema frente a perturbaciones



- El tipo del sistema frente a la perturbación describe la capacidad del sistema de rechazar una perturbación polinómica de grado "k"
- Dependerá del punto en el que se produzca la perturbación
- Típicamente, depende del número de integradores en la cadena de realimentación (tramo del bucle excluyendo la cadena directa)

Error ante la perturbación ($Y_{deseada}$ = 0):

$$E(s) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s)\big|_{r=0} = \lim_{s\to 0} sW(s)G_{wy}(s)$$

El **tipo del sistema frente a la perturbación w(t)** será, como antes, el grado "*k*" de la señal de perturbación para el que el error es constante y no nulo

Polos y ceros del sistema realimentado

$$M(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)} \qquad G(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{g(s)} \qquad H(s) = \frac{\tilde{H}(s)}{h(s)}$$

$$M(s) = \frac{K\tilde{G}(s)h(s)}{g(s)h(s) + K\tilde{G}(s)\tilde{H}(s)}$$

Ceros de M(s):

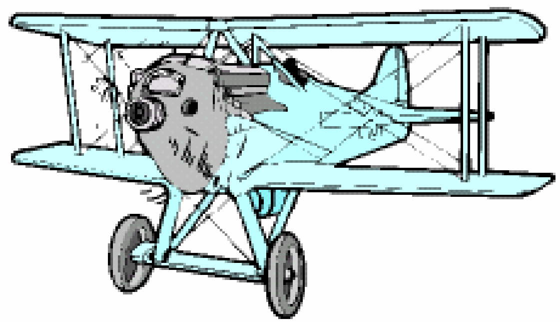
- Ceros de G(s)
- Polos de H(s)

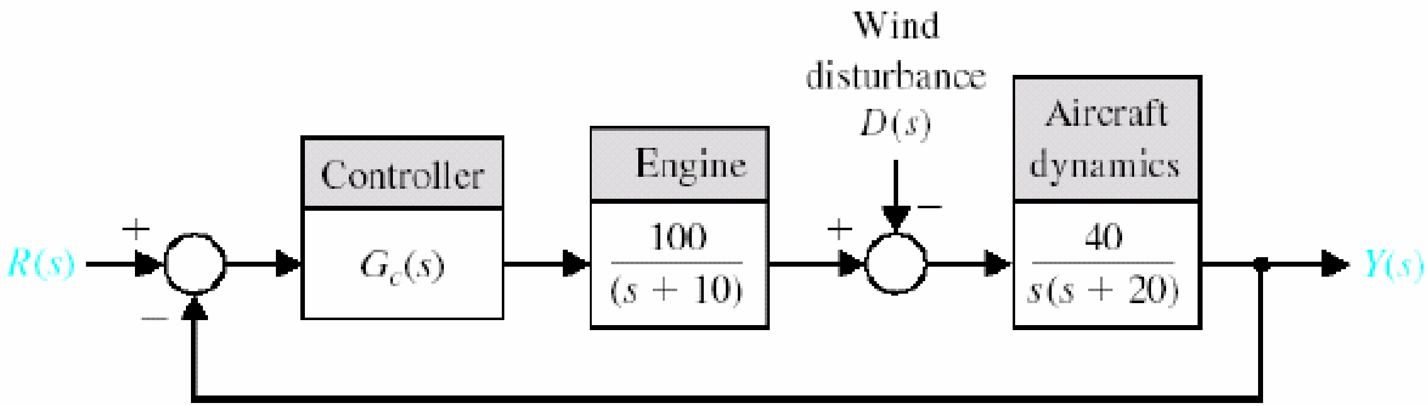
Polos de M(s):

dependen de K

Ej: Ex. Junio 2004

El control de rumbo de un biplano tradicional, se representa en el siguiente diagrama. En el bloque *Engine* se modela el efecto del motor y del timón de dirección. El viento se puede considerar una perturbación que desviará el avión. Dicho de otra forma, en presencia de viento lateral, la nariz del avión no deberá apuntar al objetivo si es que se desea llegar a él. *(Adaptado del problema DP10.2 de Dorf, "Modern Control Systems", pp. 624-625, Prentice Hall, 2001)*





1. Determine el valor mínimo de la ganancia estática del controlador, de modo que el efecto en régimen permanente de una perturbación de tipo escalón sea menor o igual a un 5%.

Ej: Ex. Junio 2004

1. En primer lugar se obtiene la función de transferencia entre Y(s) y D(s):

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{-40(s+10)}{s(s+10)(s+20)+4000G_c(s)}$$

El efecto en régimen permanente de la perturbación de tipo escalón se puede calcular aplicando el teorema del valor final:

$$\lim_{s\to 0} s\frac{1}{s}\frac{-40(s+10)}{s(s+10)(s+20)+4000G_c(s)} = \frac{-400}{4000G_c(0)} = \frac{-1}{10G_c(0)}$$

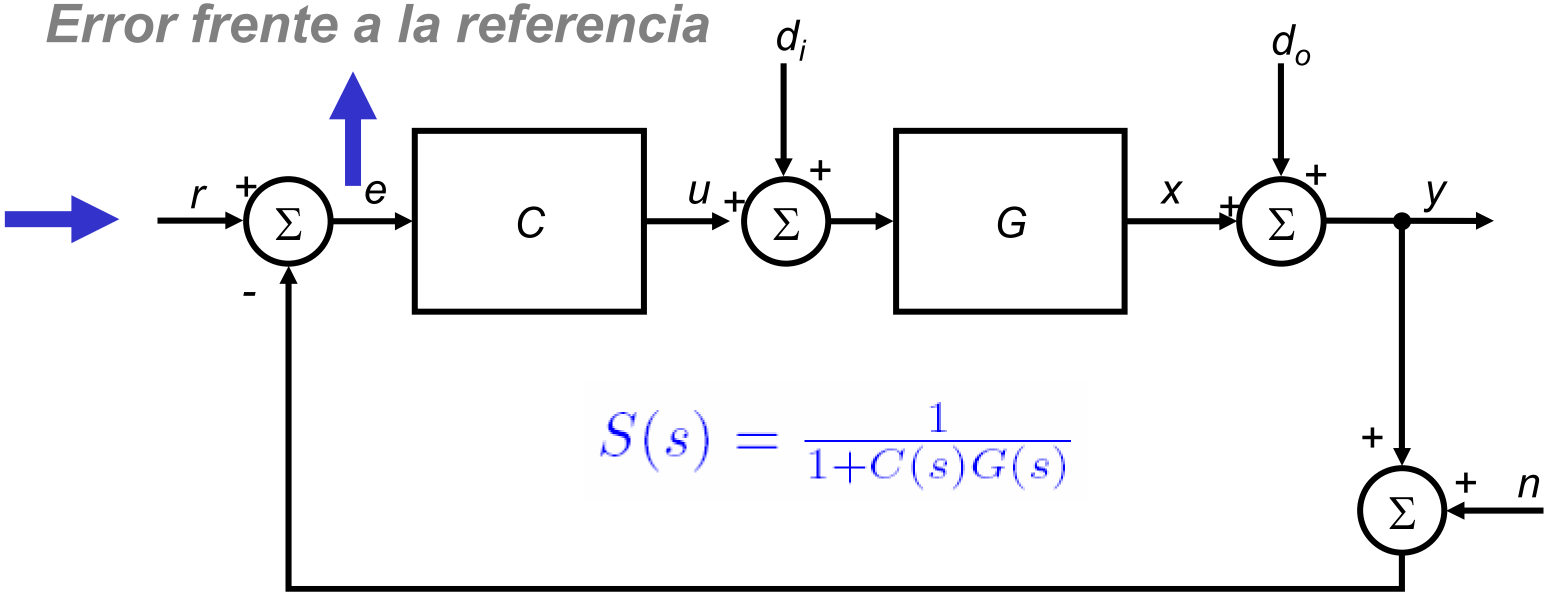
$$\left|\frac{-1}{10G_c(0)}\right| \leq 0.05 \Rightarrow \left|G_c(0)\right| \geq 2$$

O sea, que si la ganancia estática del controlador es mayor que 2, las derivas introducidas por el viento generarán un error de rumbo menor del 5%, siempre y cuando el sistema de control sea estable (sino, no tiene sentido aplicar el teorema del valor final).

Como se puede observar, que el sistema tenga un integrador no implica que se anulen las perturbaciones, pues estas son introducidas delante de él.

Errores y funciones de Sensibilidad

Error frente a la referencia



$$S(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)}$$

$$e_{rp} = \lim_{s\to 0} s \cdot r(s) \cdot S(s)$$

Error en régimen permanente (gral)

$$e_{rpp} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot S(s) = S(0)$$

Error para referencias tipo escalón

$$e_{rpv} = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \cdot S(s) = \lim_{s\to 0} \cdot \frac{1}{s} \cdot S(s)$$

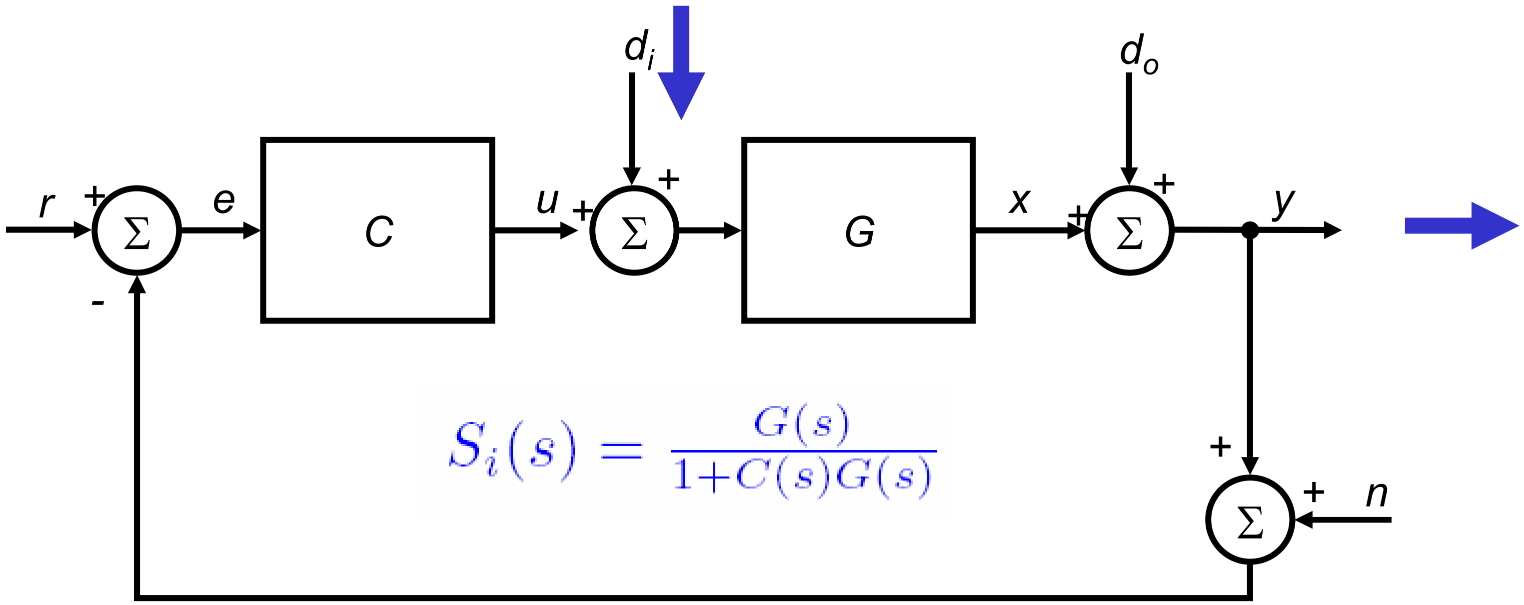
Error para referencias tipo rampa

$$e_{\omega} = |e(j\omega)| = |S(j\omega)e^{j\omega t}| = |S(j\omega)|$$

Error para referencias frecuencia w

Errores y funciones de Sensibilidad

Error frente a perturbaciones de carga



$$S_i(s) = \frac{G(s)}{1+C(s)G(s)}$$

$$E(s) = d_i(s)S_i(s)$$

$$e_{rpp} = S_i(0)$$

Error ante escalón

$$e_{rpv} = \lim_{s\to 0} \cdot \frac{1}{s} \cdot S_i(s)$$

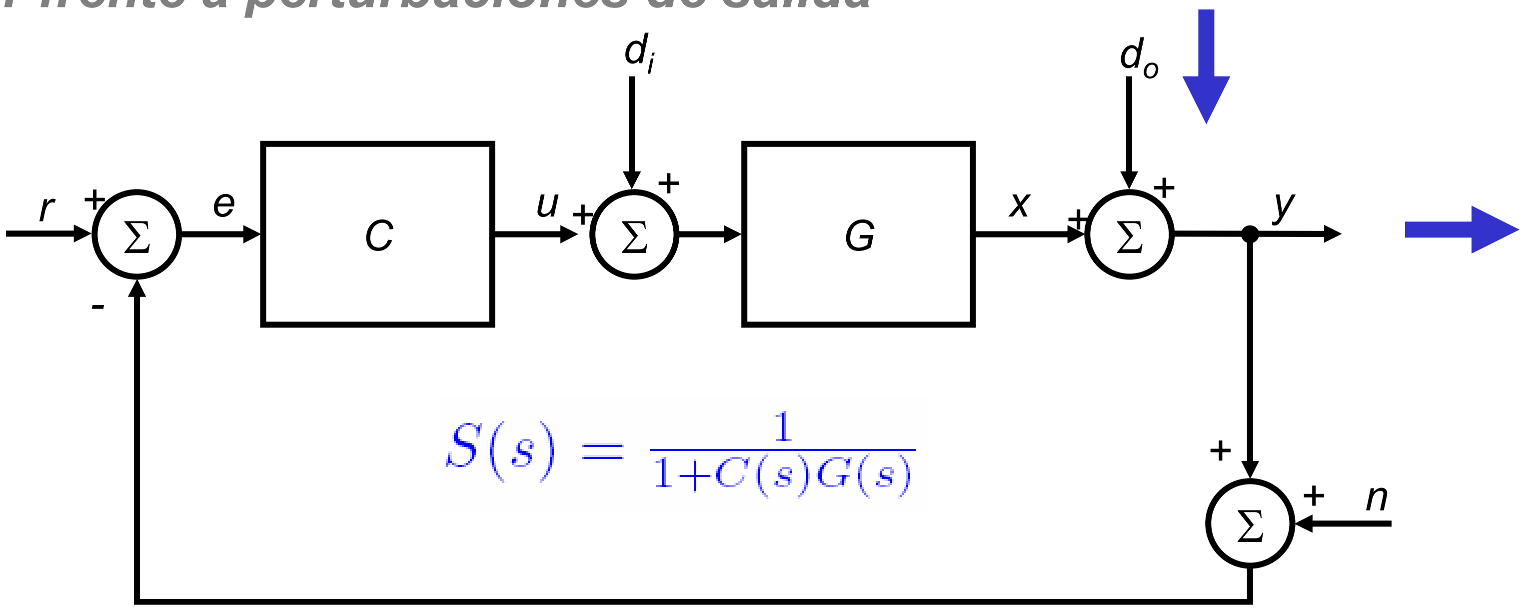
Error ante rampa

$$e_\omega = |S_i(j\omega)|$$

Error en frecuencia

Errores y funciones de Sensibilidad

Error frente a perturbaciones de salida



$$S(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)}$$

$$E(s) = d_o(s)S(s)$$

$$e_{rpp} = S(0)$$

Error ante escalón

$$e_{rpv} = \lim_{s \to 0} \cdot \frac{1}{s} \cdot S(s)$$

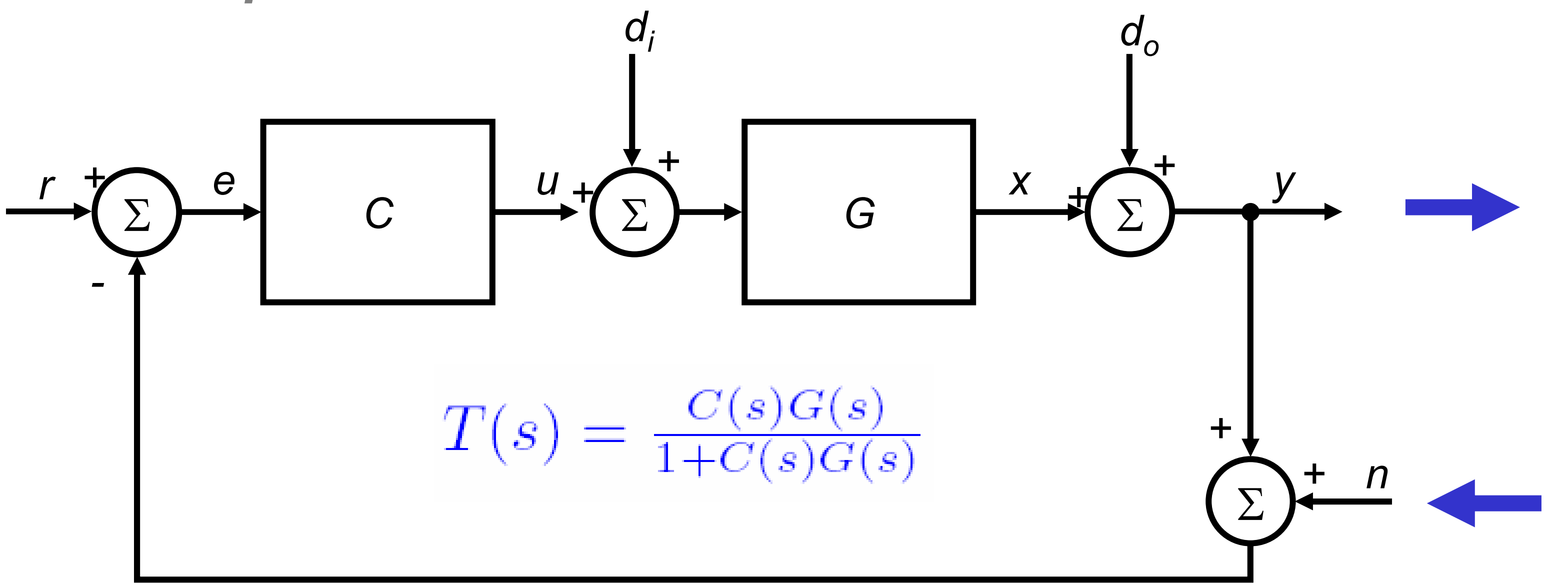
Error ante rampa

$$e_{\omega} = |S(j\omega)|$$

Error en frecuencia

Errores y funciones de Sensibilidad

Error frente a perturbaciones del sensor



$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$$

$$e_{rpp} = T(0)$$

Error ante escalón

$$e_{\omega} = |T(j\omega)|$$

Error en frecuencia

Ejercicio del cuestionario del 29-3-05

3. Dado el siguiente sistema

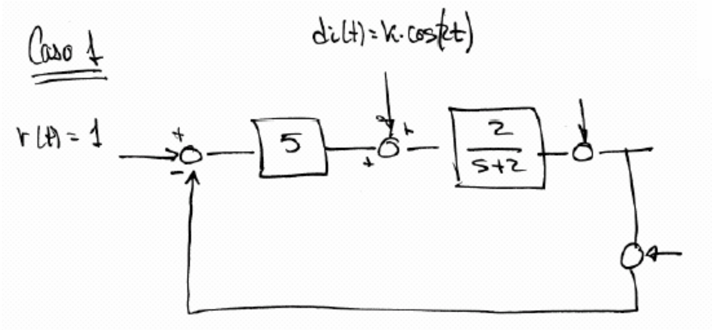
$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$

se implementa un control con realimentación unitaria empleando los siguientes controladores

$$C_1(s) = 5, \qquad C_2(s) = 2 \cdot \frac{s+2}{s}$$

Calcular para ambos el error de seguimiento de referencias de tipo escalón y el efecto de perturbaciones de carga del tipo $d_i(t) = K \cdot \cos(2t)$.

Ejercicio del cuestionario del 29-3-05



Primer controlador: $C(s)=5$

$$L(s)=5\cdot\frac{2}{s+2}=\frac{10}{s+2}$$

$$S(s)=\frac{1}{1+L(s)}=\frac{1}{1+\frac{10}{s+2}}=\frac{s+2}{s+12}$$

$$S_i(s)=\frac{G(s)}{1+L(s)}=G(s)\cdot S(s)=\frac{2}{s+12}$$

El error de seguimiento de referencias viene dado por $S(s)$ en este caso. En regimen permanente, para referencias tipo escalón unitario:

$$\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{1}{s}\cdot S(s)=S(0)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}\Rightarrow \boxed{16.6\%}$$

Ejercicio del cuestionario del 29-3-05

El efecto de una perturbación de carga de tipo cosenoidal $d_i = k \cdot \cos(2t)$ puede obtenerse sustituyendo $S_i(s)\big|_{s=j\omega}$

$$S_i(2j) = \frac{2}{2j+12} = \frac{1}{j+6}$$

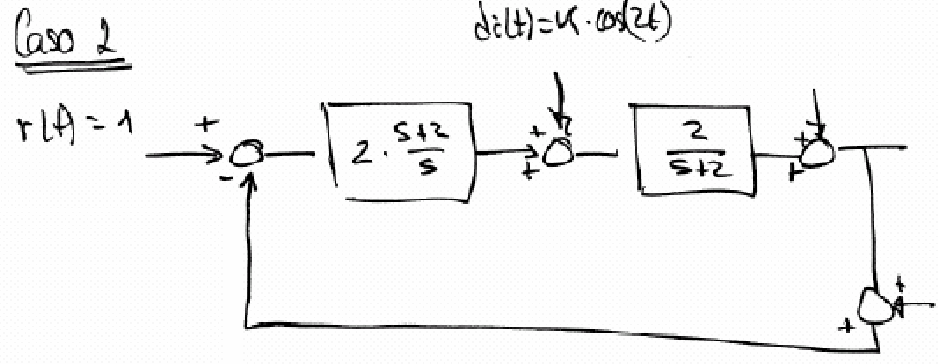
La salida ante esa perturbación tendrá como modulo

$$K \cdot \left|S_i(2j)\right| = K \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2+6^2}} = K \cdot \frac{1}{\sqrt{37}}$$

$\frac{1}{\sqrt{37}} = 0.164$ → La pert. tiene un efecto del $\boxed{16.4\%}$

Ejercicio del cuestionario del 29-3-05

Caso 2



Segundo controlador $C_2(s) = 2 \cdot \frac{s+2}{s}$

$$L(s) = C_2(s) \cdot G(s) = 2 \cdot \frac{s+2}{s} \cdot \frac{2}{s+2} = \frac{4}{s}$$

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)} = \frac{1}{1 + \frac{4}{s}} = \frac{s}{s+4}$$

$$S_i(s) = G(s) \cdot S(s) = \frac{2}{s+2} \cdot \frac{s}{s+4} = \frac{2s}{(s+2)(s+4)}$$

Error en regimen permanente ante referencias de tipo escalón:

$$\lim_{s \to 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot S(s) = S(0) = \underline{\underline{0}}$$

El sistema tiene un seguimiento de referencias (tipo escalón) sin error en regimen permanente

Ejercicio del cuestionario del 29-3-05

El efecto de perturbación de carga senoidal puede calcularse como antes

$$S_i(2j) = \frac{2\cdot 2j}{(2j)^2 + 6\cdot(2j) + 8} = \frac{4j}{-4 + 12j + 8} =$$

$$= \frac{4j}{12j + 4} = \frac{j}{3j + 1}$$

En la salida habrá una senoide de amplitud

$$k\cdot|S_i(2j)| = k\cdot\frac{1}{\sqrt{3^2+1}} = k\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} = k\cdot 0.316$$

El efecto de la perturbación es de un $\overline{\overline{31.6\,\%}}$

Pese a anular perturb. tipo escalón en rég. perm. ¡No anula pert. senoidal!

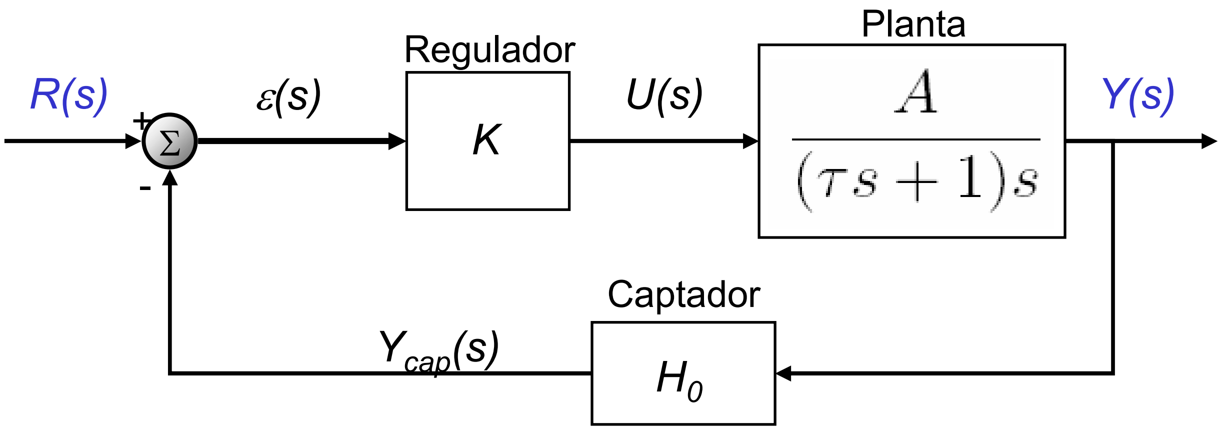
Ejercicio del cuestionario del 29-3-05

Conclusiones

* El controlador $C_1(s)$ no anula perturbaciones constantes (escalón) en reg. permanente, pero consigue mejor atenuación para perturbaciones de carga senoidales de frec. $\omega = 2$ rads/s

* El controlador $C_2(s)$, de tipo PI anula perturbaciones de carga constantes! en régimen permanente y tiene un buen seguimiento de referencias constantes (escalón) en reg. perm. Sin embargo se comporta peor en cuanto a pert. de carga senoidales de frec. $\omega = 2$ rads/s ~~con~~ cuyo efecto es un 31.6% (frente al 16.4% del controlador C_1)

Ejemplo

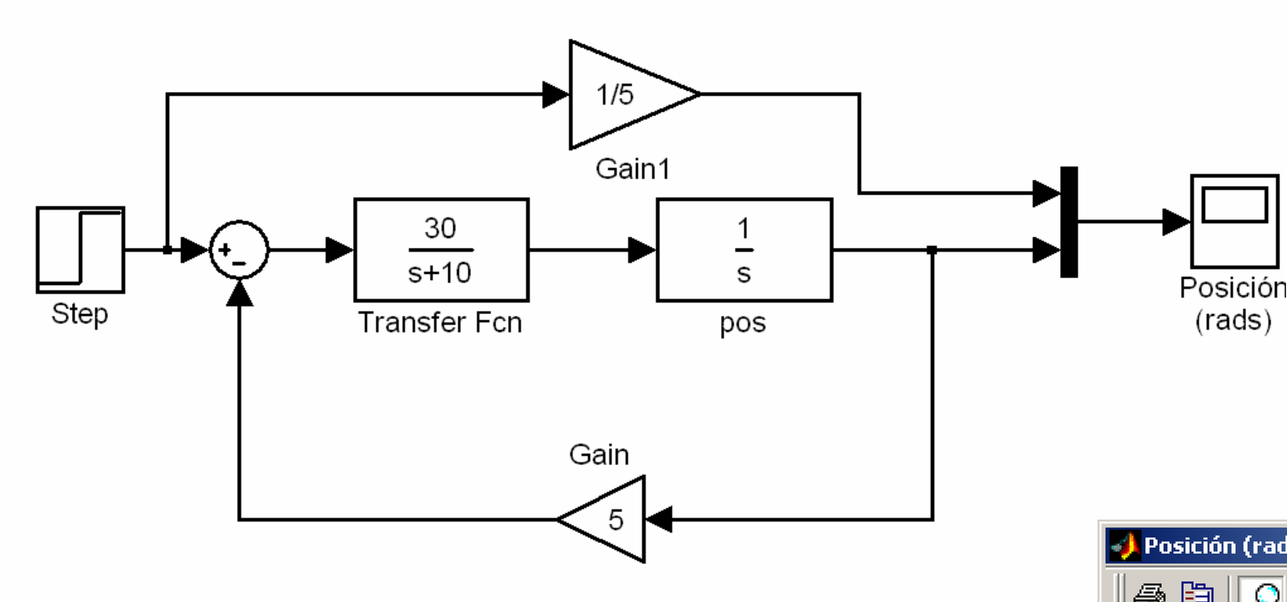


$$K_p = \lim_{s \to 0} K \cdot \frac{A}{(\tau s+1)s} \cdot H_0 = \infty \longrightarrow e_{rpv} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{KAH_0} \longrightarrow \text{Sistema de Tipo 1}$$

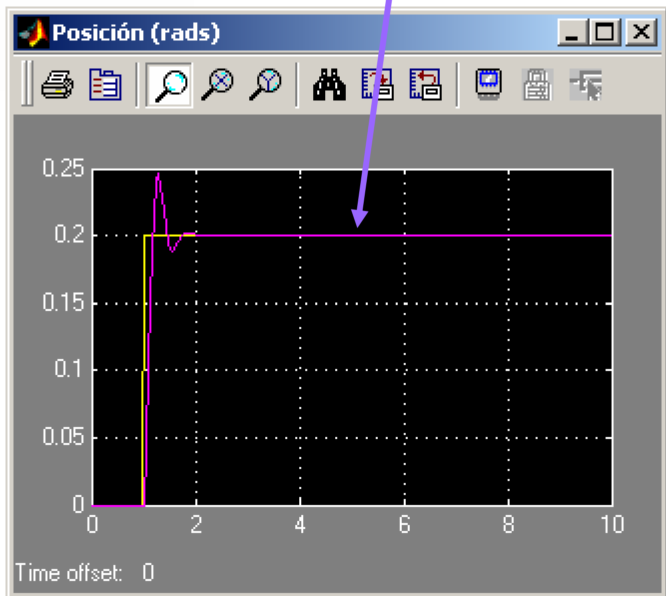
$$K_v = \lim_{s \to 0} s \cdot K \frac{A}{(\tau s+1)s} \cdot H_0 = KAH_0$$

- El sistema sigue con error cero referencias de tipo escalón (en ausencia de perturbaciones)
- El sistema comete un error constante para referencias tipo rampa
- Sin embargo, el sistema es tipo 0 frente a perturbaciones de carga pues comete error ante perturbaciones de tipo escalón a la entrada del proceso.

Ejemplo: Respuesta al escalón



Error de posición nulo en reg. perm.



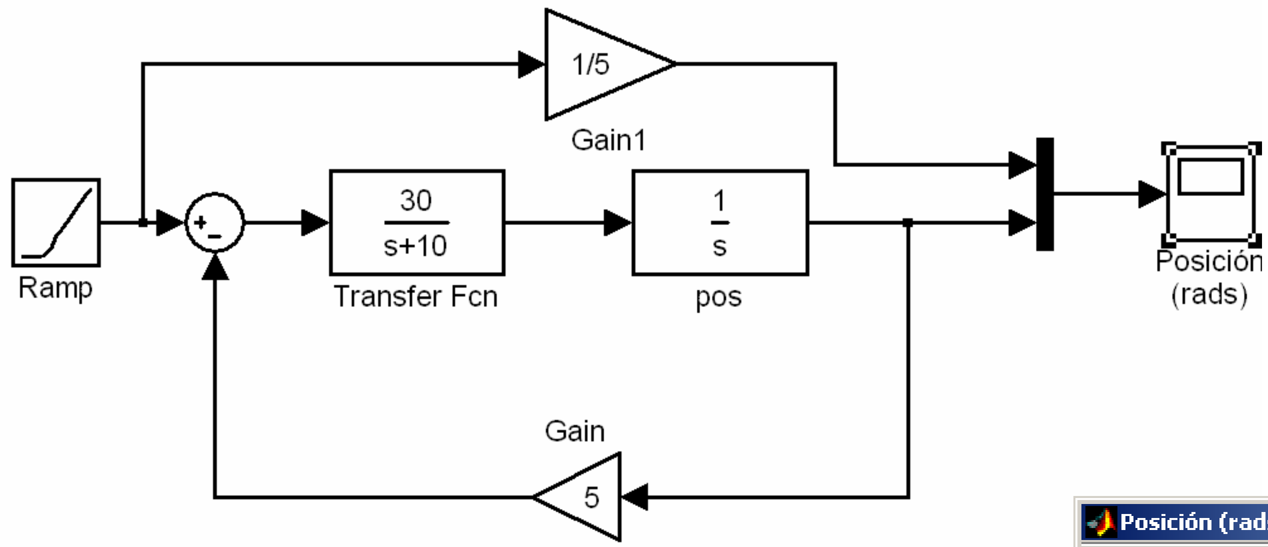
Parámetros:

A = 3,

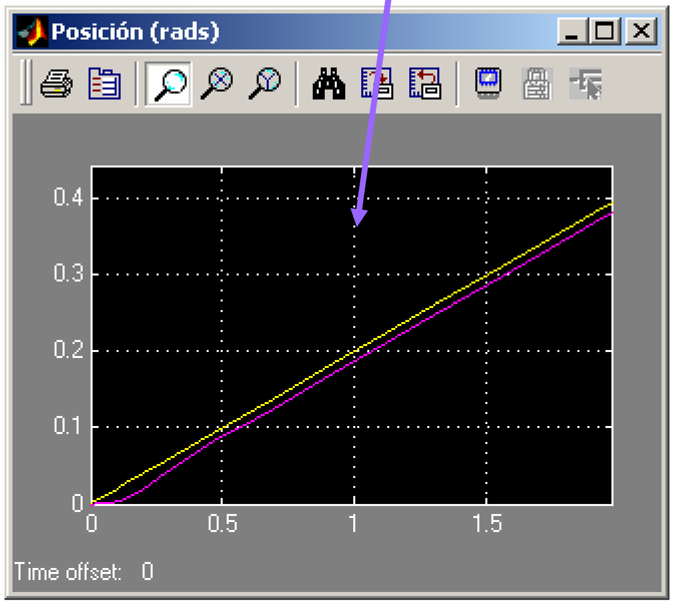
K = 1

$H(s) = H_0 = 5$

Ejemplo: Respuesta a la rampa



Error de velocidad constante en reg. permanente



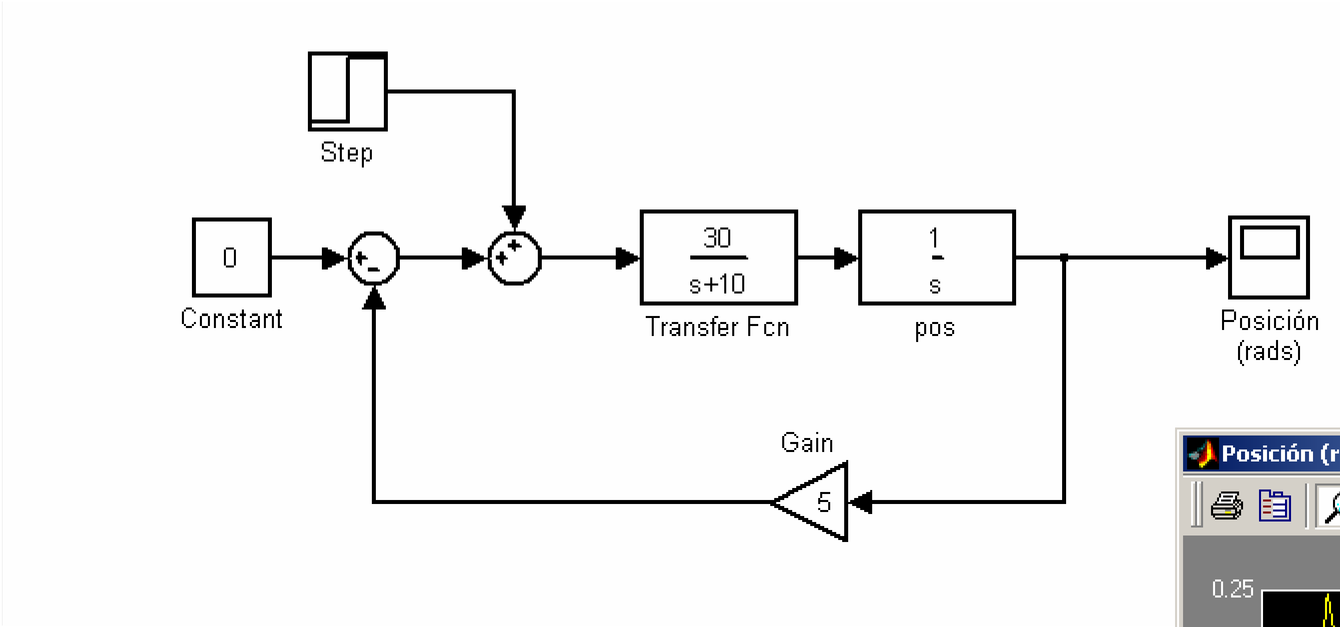
Parámetros:

A = 3,

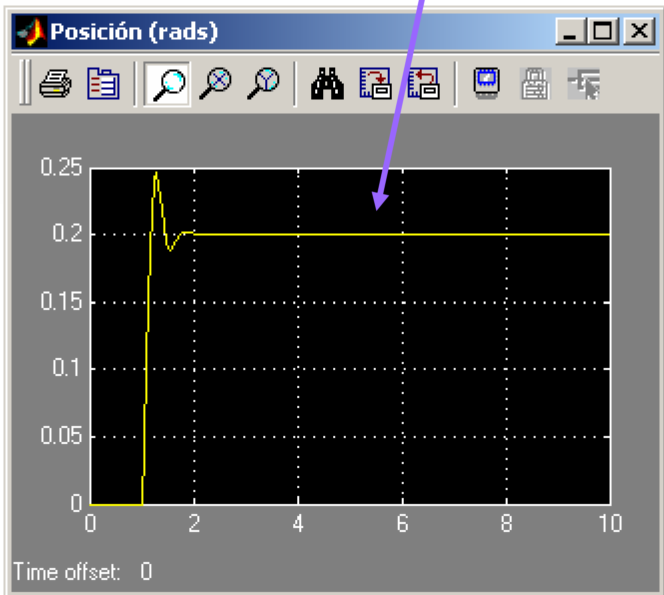
K = 1

$H(s) = H_0 = 5$

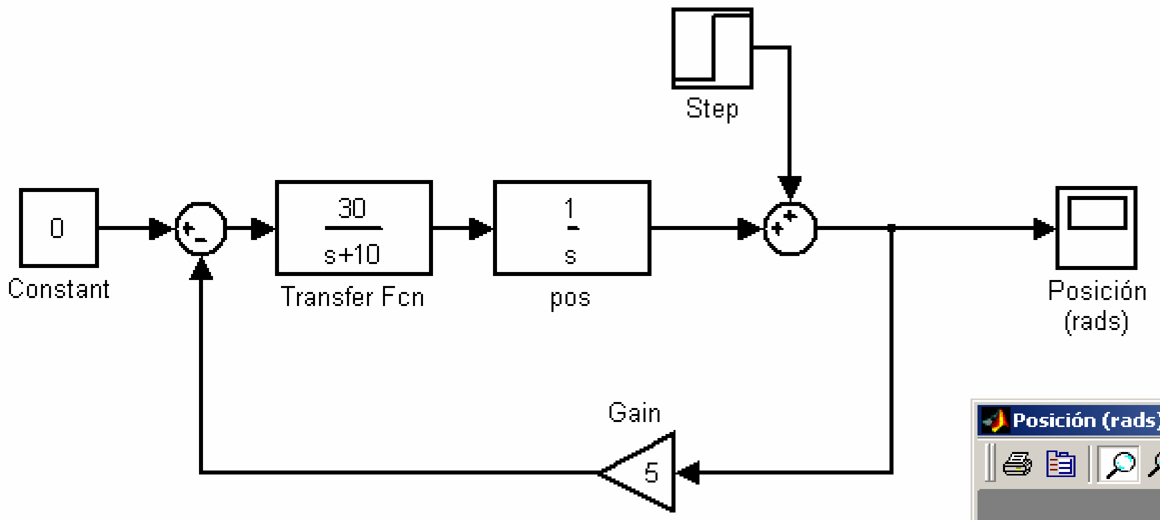
Ejemplo: Perturbación_1 escalón



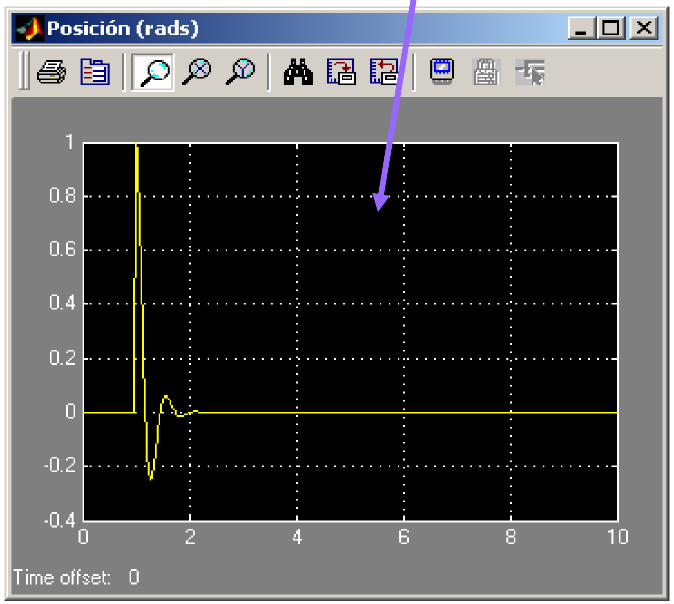
Tipo 0



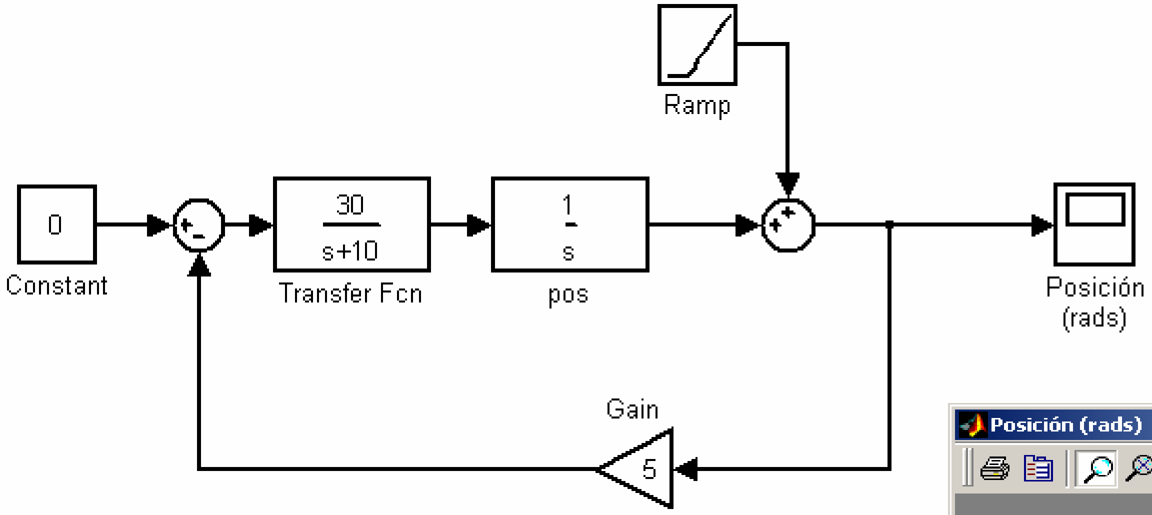
Ejemplo: Perturbación_2 escalón



En este punto, es capaz de anular la perturbación en régimen permanente



Ejemplo: Perturbación_2 rampa



Error de velocidad cte. >> Tipo 1