



# Diseño en el dominio de la frecuencia

## Tema 7

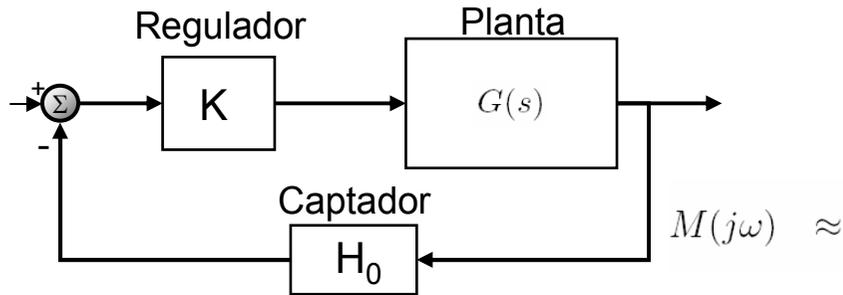


# Índice

- Respuesta frecuencial en bucle cerrado
- Red de adelanto de fase
- Red de atraso de fase
- Compensación de adelanto-atraso

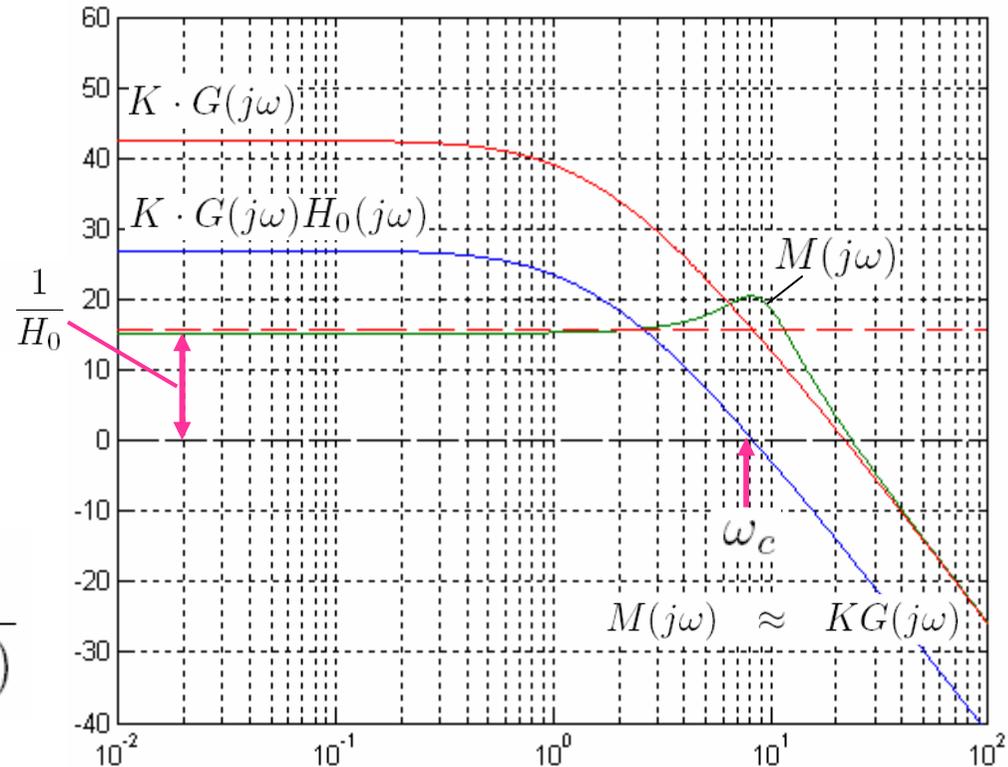


# Respuesta frecuencial en Bucle Cerrado



Función de transferencia en bucle cerrado:

$$M(j\omega) = \frac{K \cdot G(j\omega)}{1 + K \cdot G(j\omega)H_0(j\omega)}$$



$$\begin{array}{l}
 |KG(j\omega)H_0| \gg 1 \quad \omega \ll \omega_c \\
 |KG(j\omega)H_0| \ll 1 \quad \omega \gg \omega_c
 \end{array}
 \longrightarrow M(j\omega) \approx \begin{cases} \frac{1}{H_0} & \omega \ll \omega_c \\ KG(j\omega) & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

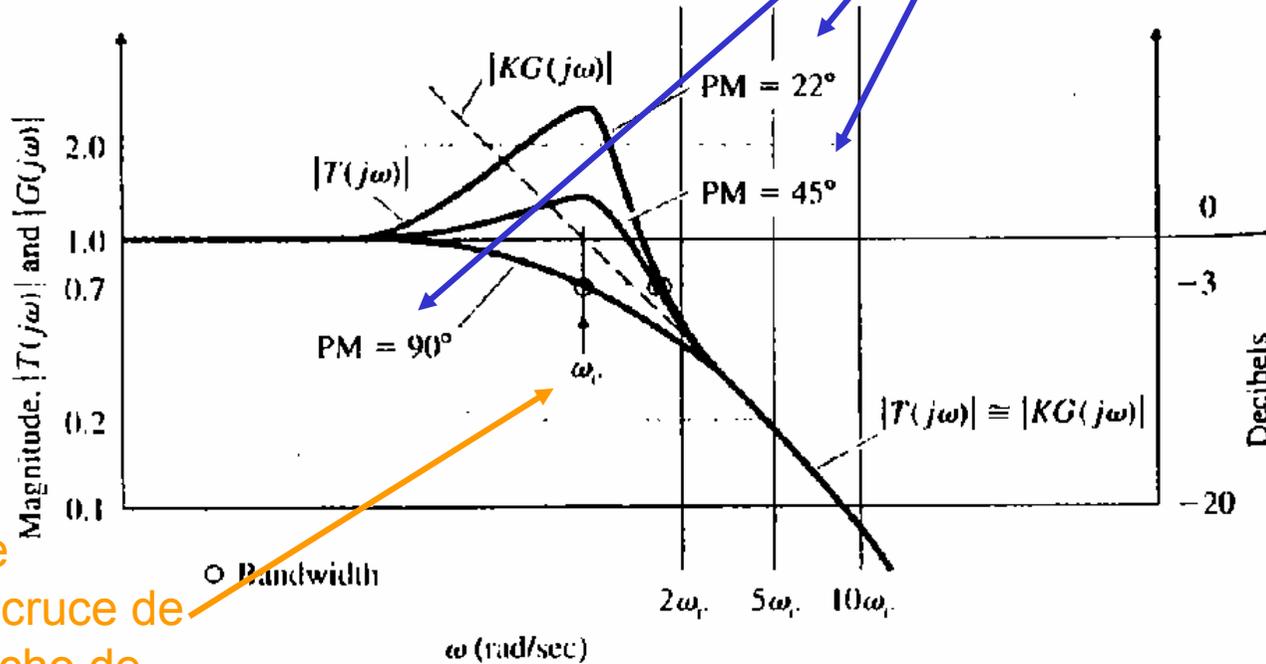


# Respuesta frecuencial en Bucle Cerrado

A la frecuencia de cruce de ganancia,  $\omega_c$

Relación entre Margen de Fase (MF) y Frecuencia de resonancia ( $M_r$ )

$$M(j\omega_c) = \frac{1}{1 + KG(j\omega_c)H_0} = \frac{1}{1 + 1_{\{MF-180^\circ\}}}$$



Relación entre frecuencia de cruce de ganancia y ancho de banda



# Especificaciones

## Principales parámetros de diseño

Frecuencia de cruce  
de ganancia,  $\omega_c$



Velocidad de respuesta  
 $\omega_{bw}$ ,  $t_r$ ,  $t_s$

Margen de fase (MF)



Sobreoscilación y resonancia  
 $\zeta$ ,  $M_p$ ,  $M_r$

Ganancia en baja frecuencia

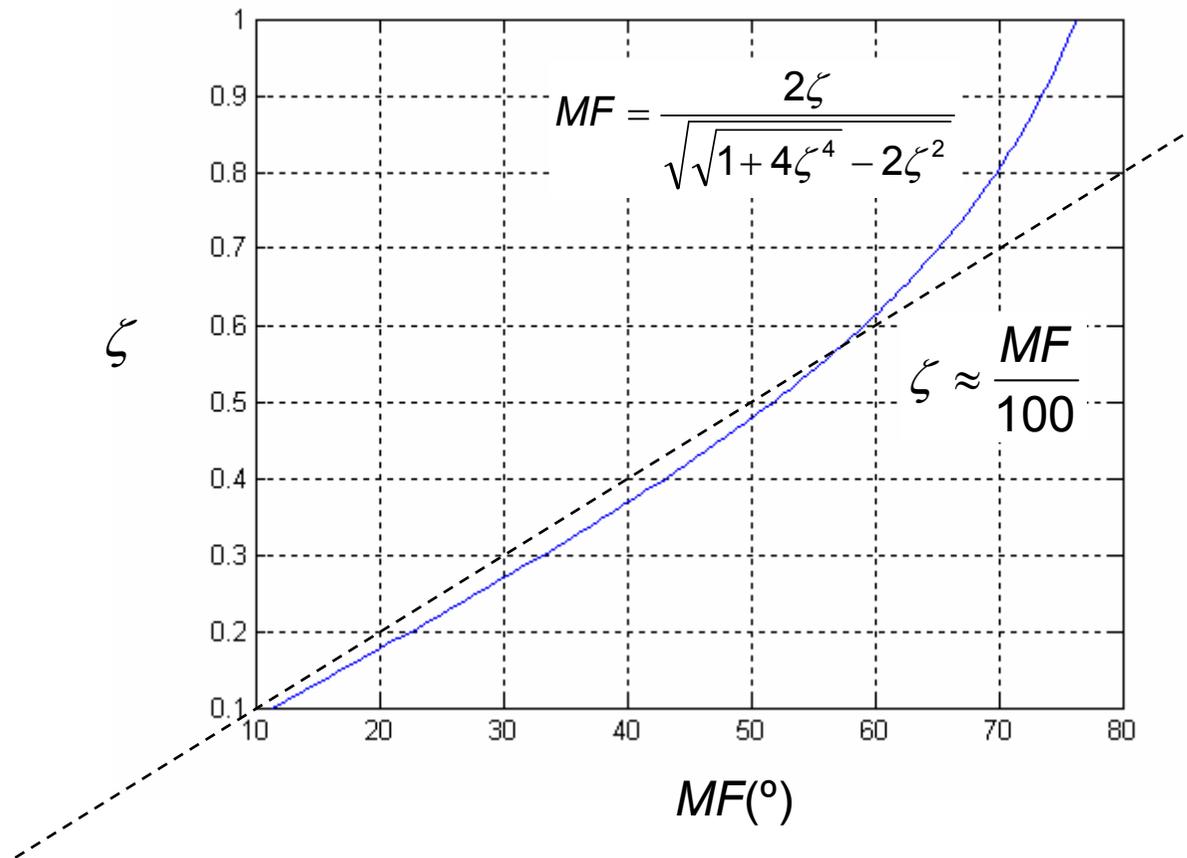


Errores en régimen permanente  
 $K_p$ ,  $K_v$ , ...



# Especificaciones

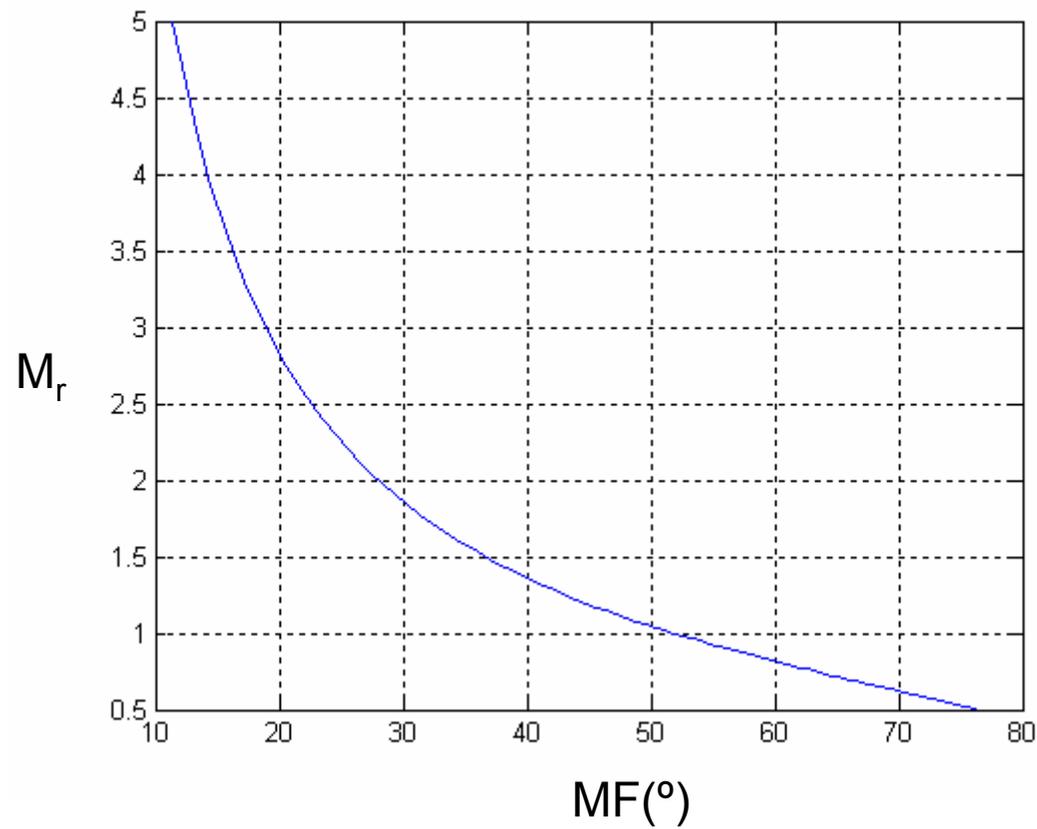
## Relación entre MF y factor de amortiguamiento





# Especificaciones

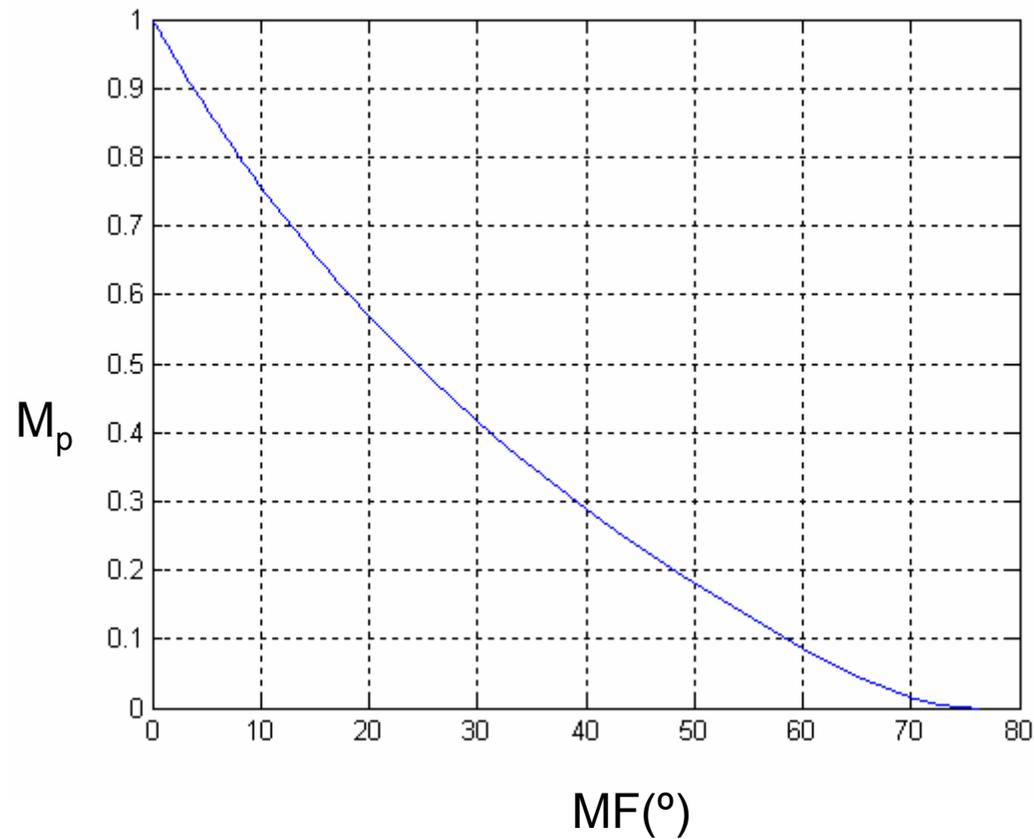
## Relación entre MF y resonancia





# Especificaciones

## Relación entre MF y sobreoscilación $M_p$





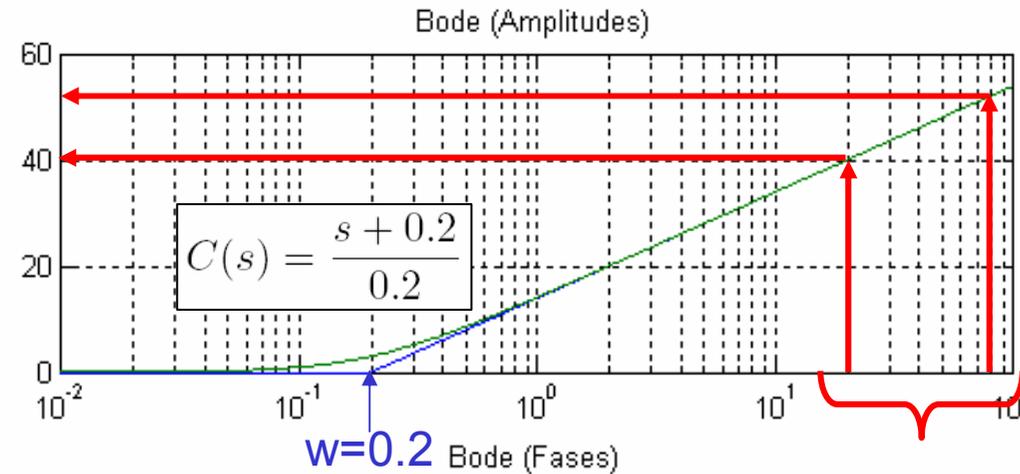
# Red de Adelanto de Fase

## Cero puro

2

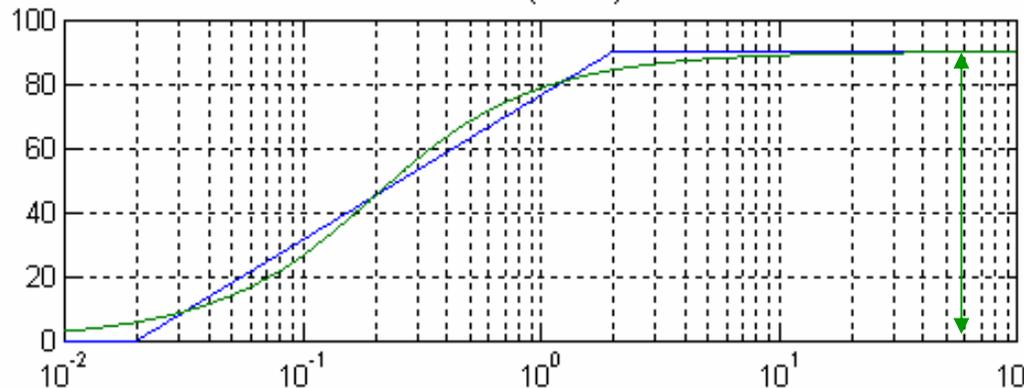
... pero no es realizable

$$C(s) = K(Ts + 1) \quad (K=1)$$



3

...y amplifica ruidos de alta frecuencia



Aporta hasta 90° de fase

1

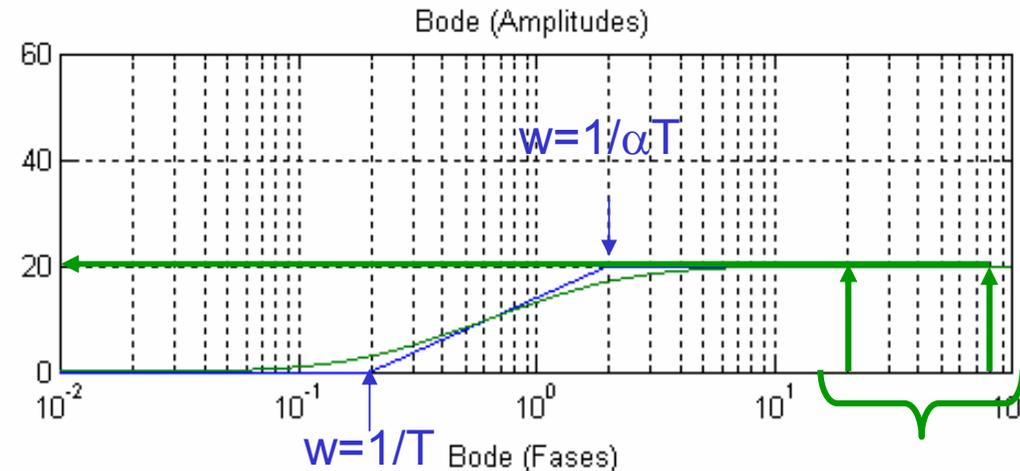


# Red de Adelanto de Fase

## Cero + Polo

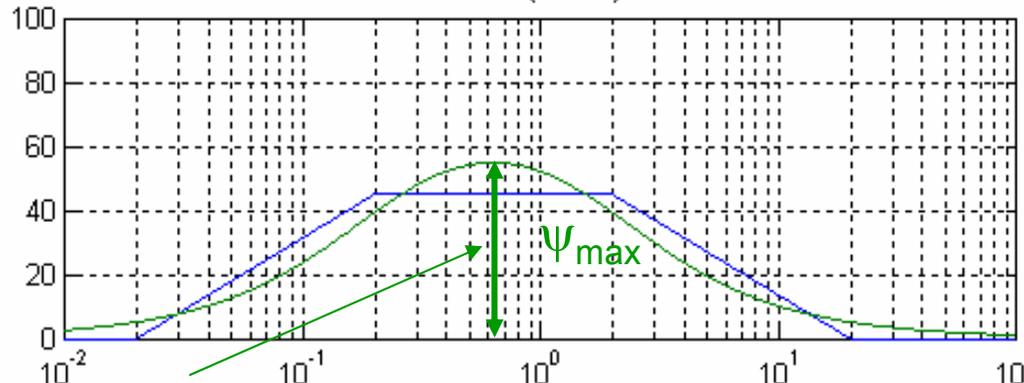
**2** ES realizable

$$C(s) = K \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1} \quad (K=1)$$



**3**

Mantiene acotados niveles de ruido HF



Aporta fase (menos de 90°) **Sistemas Automáticos**

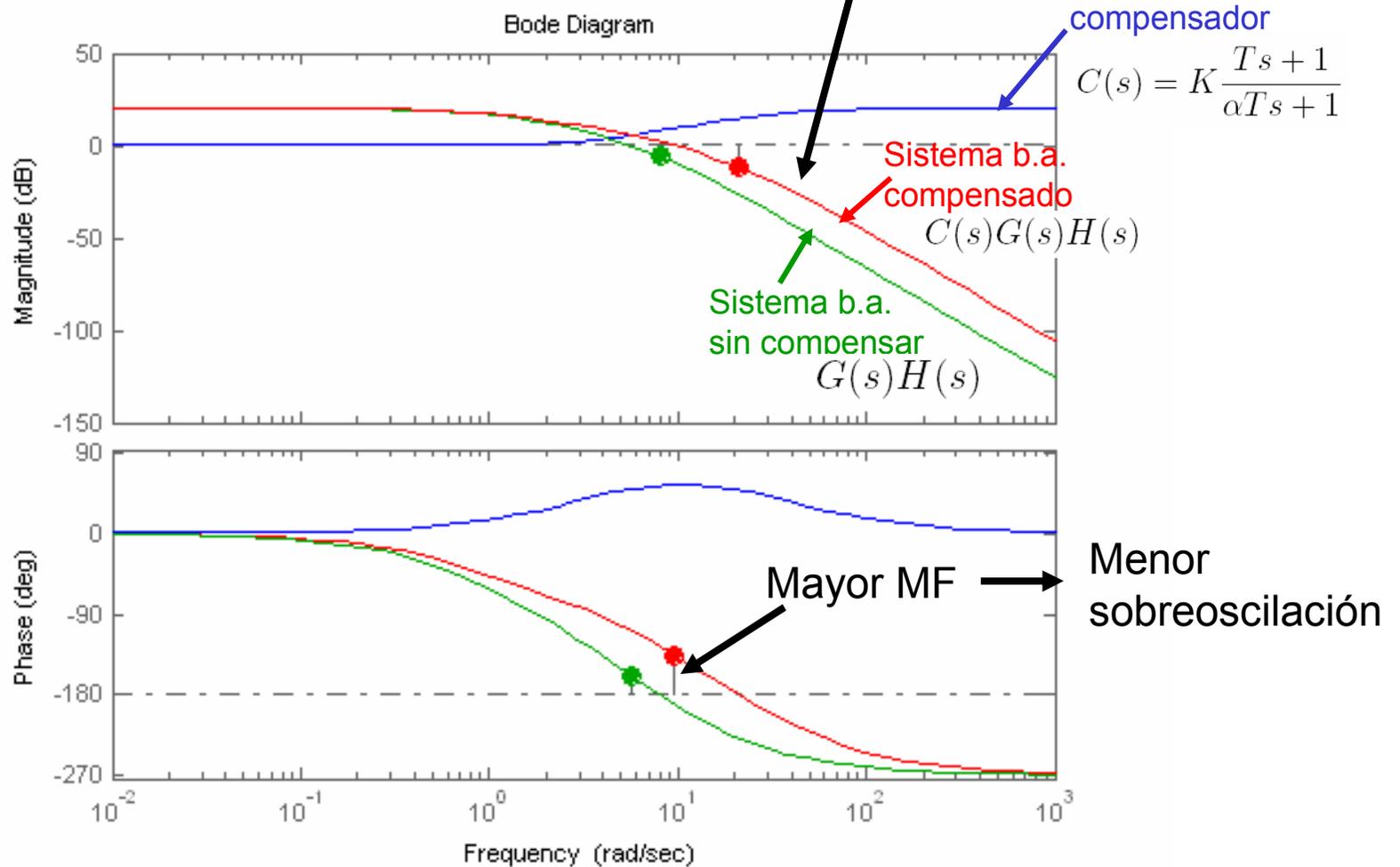
**1**



# Red de Adelanto de Fase

## Efectos sobre Mr y Ancho de Banda

Mayor ancho de banda → Menor  $t_s$   
Mayor rapidez



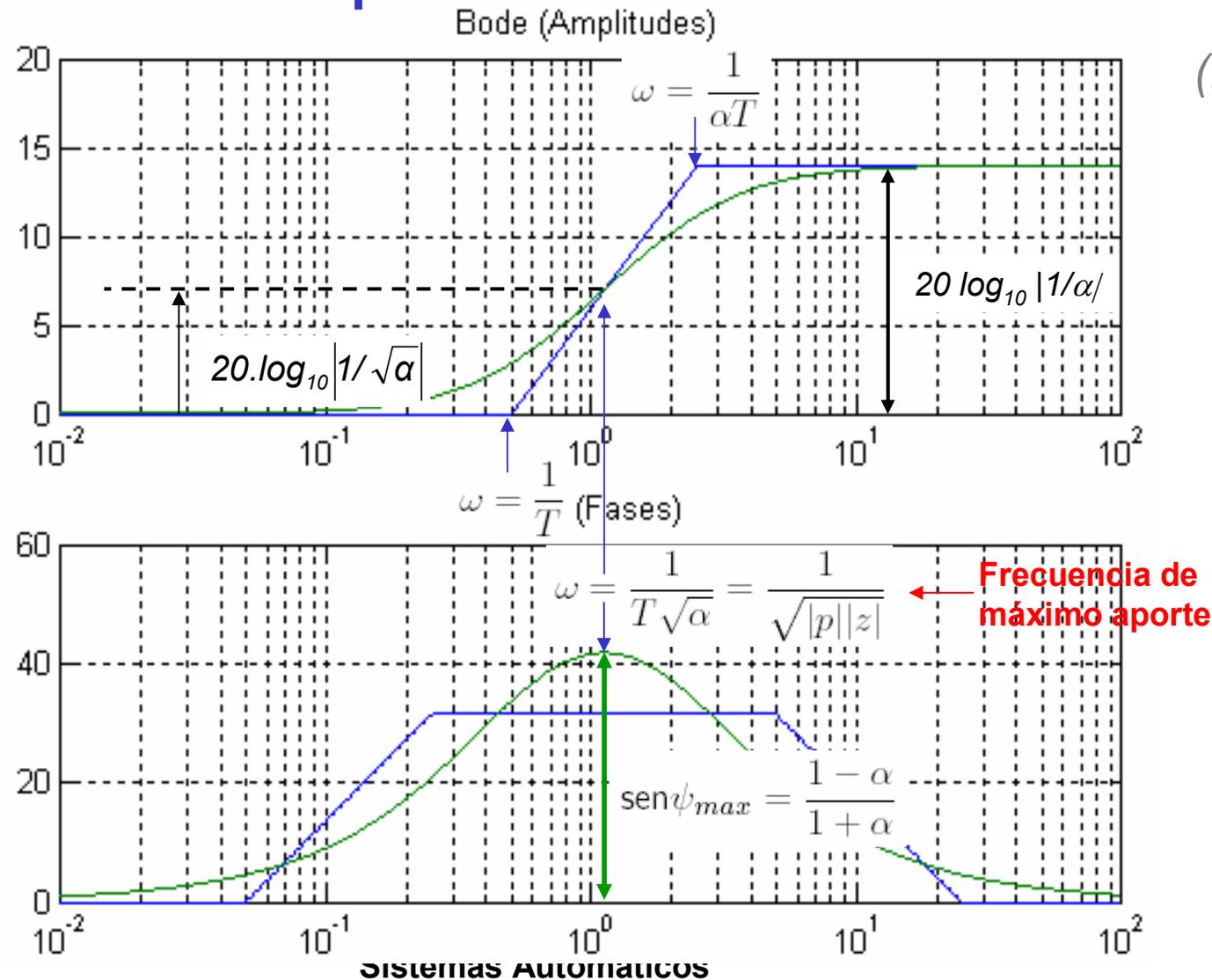


# Red de Adelanto de Fase

## Anatomía del Compensador

$$C(s) = K \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1}$$

(K=1)

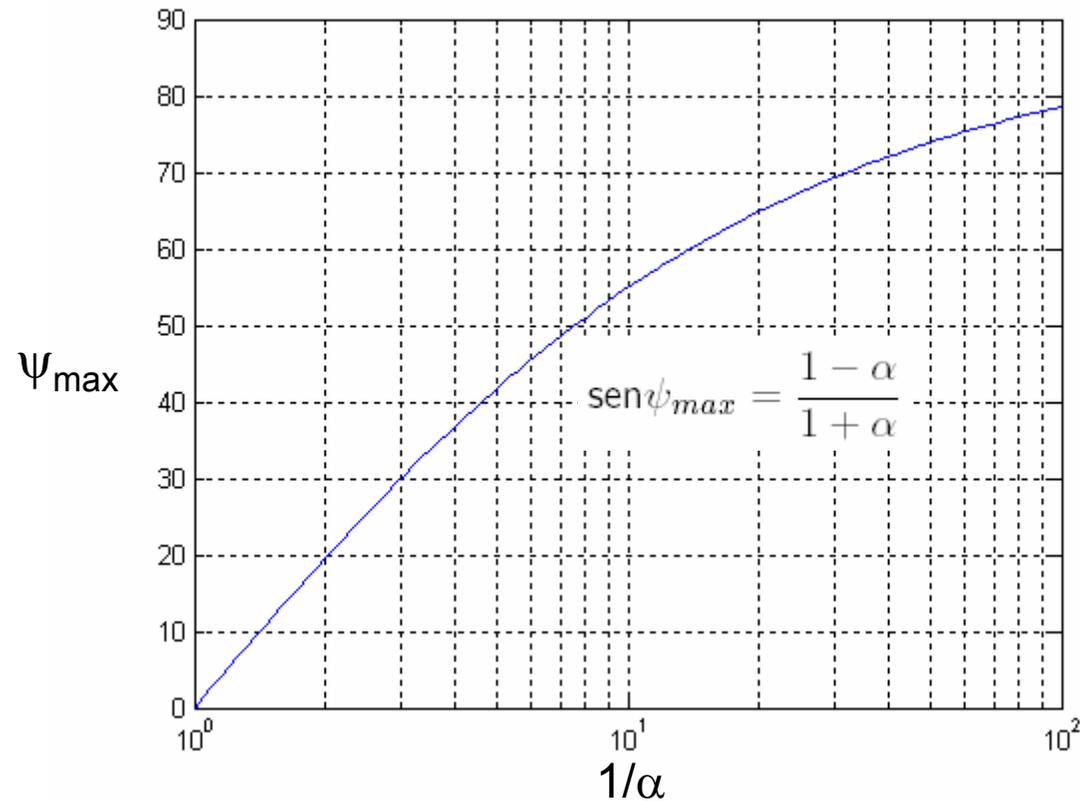




# Red de Adelanto de Fase

## Máximo aporte en función de $\alpha$

Máximo incremento de fase  
aportado por la compensación de adelanto





## Ejemplo

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$e_v < 10\%$$

$$M_p < 25\%$$

Solución propuesta:

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) \cdot G(s) \cdot H_0$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) \cdot G(s) H_0$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot C(s) \cdot \frac{1}{s(s+1)} \cdot 1$$

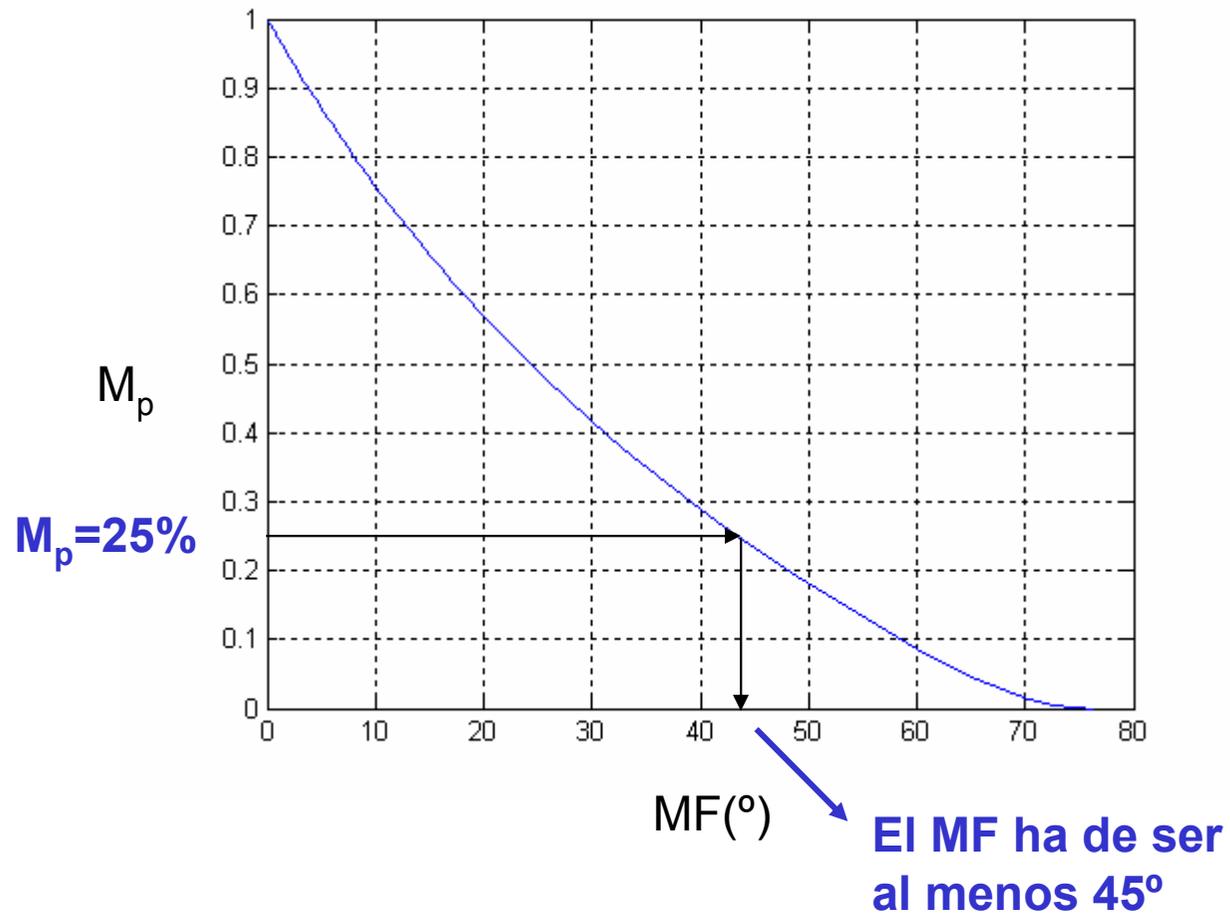
$$= C(0)$$

$$\rightarrow e_v = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{C(0)} \leq 0.10 \rightarrow C(0) \geq 10$$

La ganancia del regulador ha de ser al menos 10

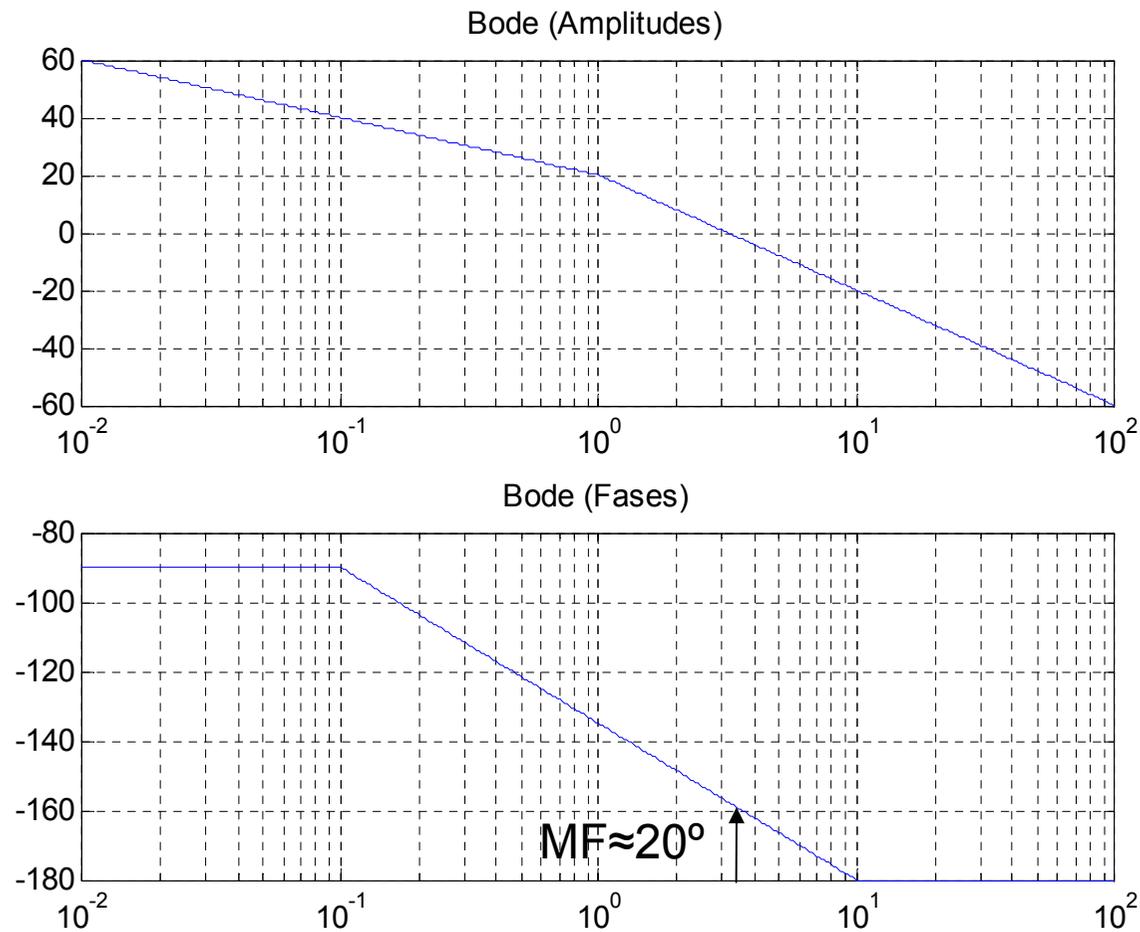


# Ejemplo





## Ejemplo. Medición del margen de fase

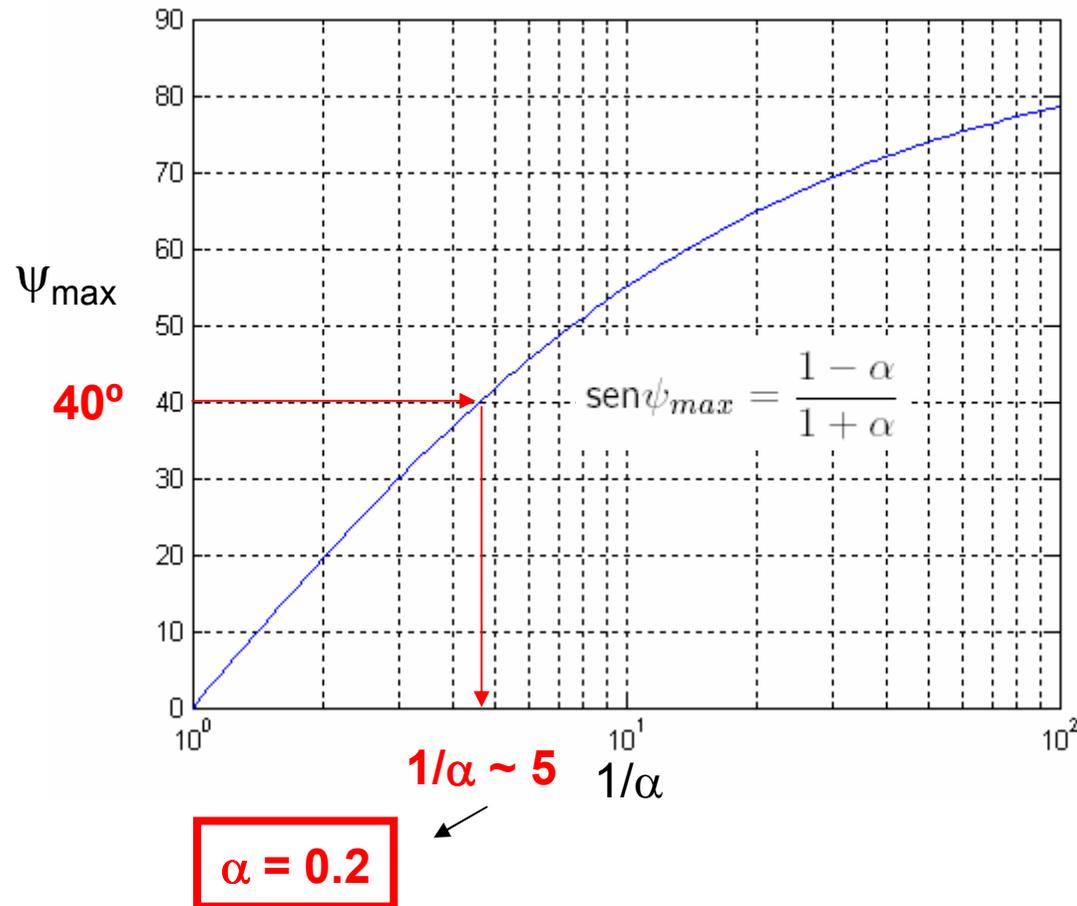


Hacen  
falta  $25^\circ$   
más



# Ejemplo

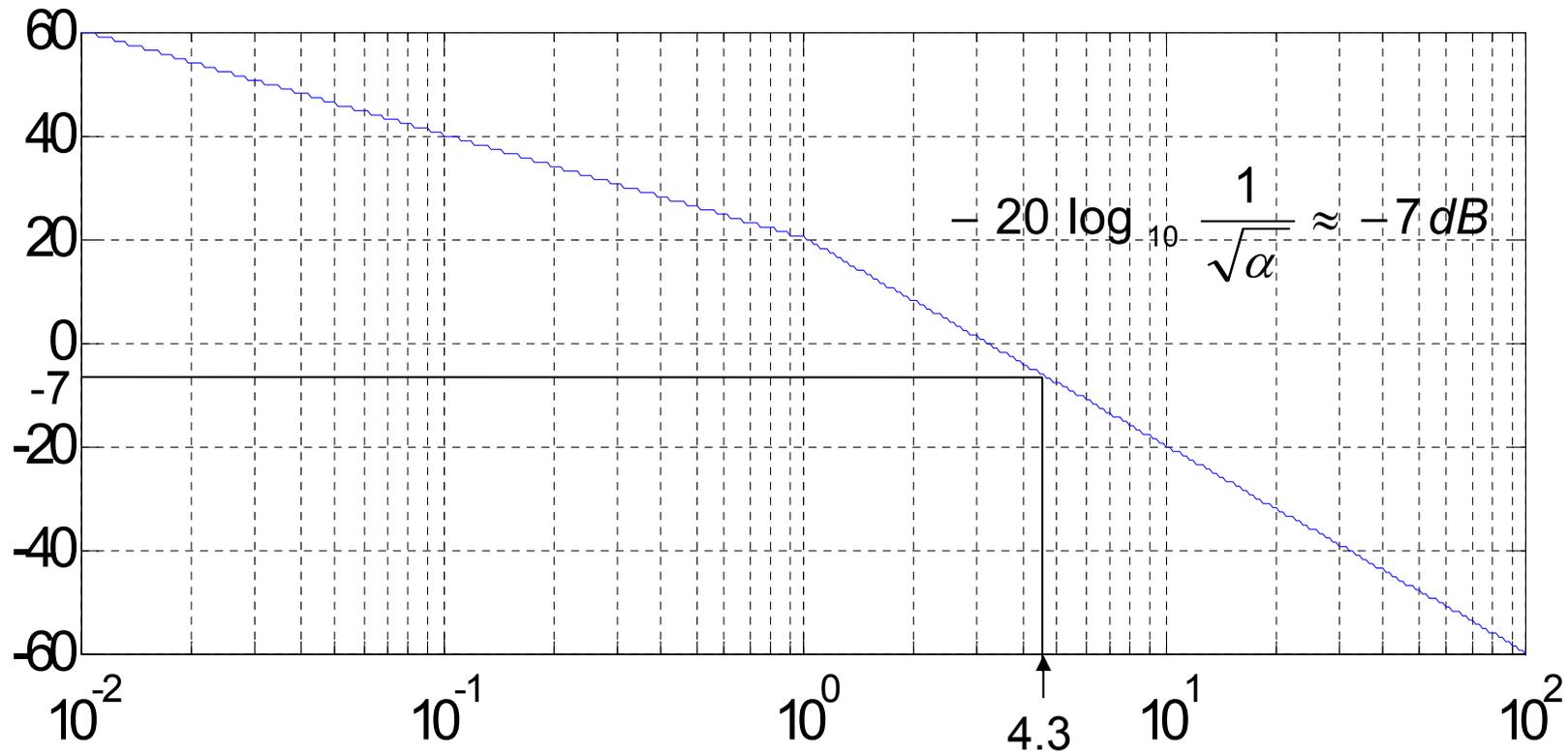
Máximo incremento de fase  
aportado por la compensación de adelanto





## Ejemplo. Colocación de la red.

Bode (Amplitudes)





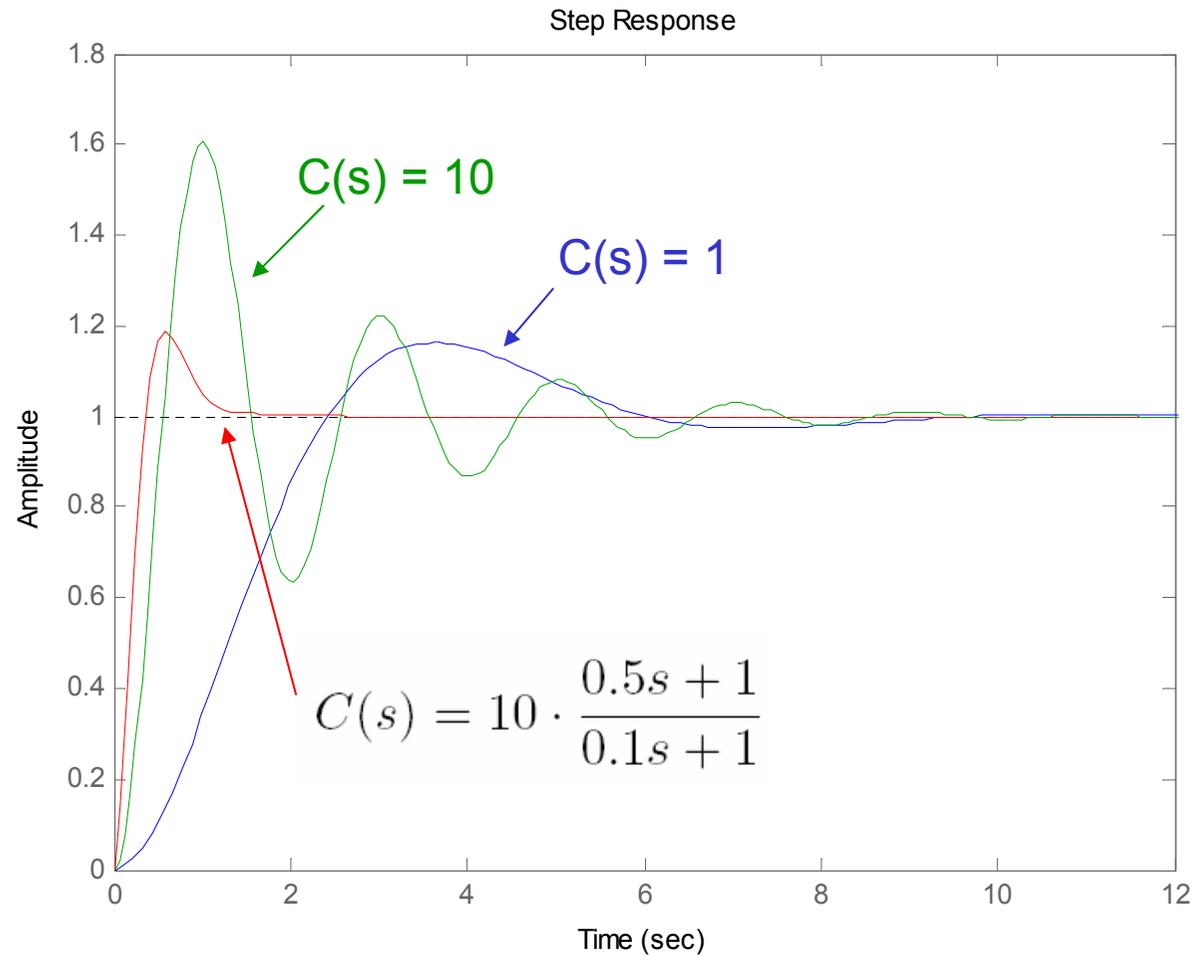
## Ejemplo. Controlador

$$c = \frac{1}{T} = \omega_{cg} \sqrt{\alpha} = 1.923 \quad p = \frac{1}{\alpha T} = 9.61$$

$$C(s) = 50 \frac{s+1.92}{s+9.61} = 10 \frac{1}{0.2} \frac{s + \frac{1}{0.521}}{s + \frac{1}{0.2 \cdot 0.521}} = 10 \frac{0.521s + 1}{0.2 \cdot 0.521s + 1}$$



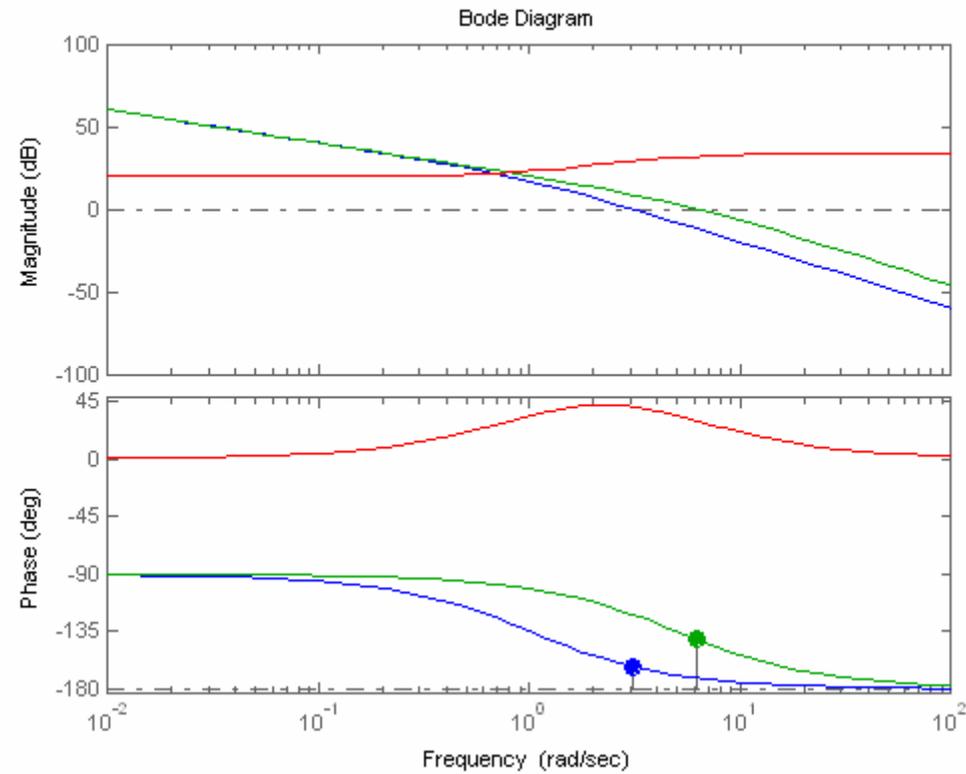
## Ejemplo. Respuesta ante escalón





# Ejemplo

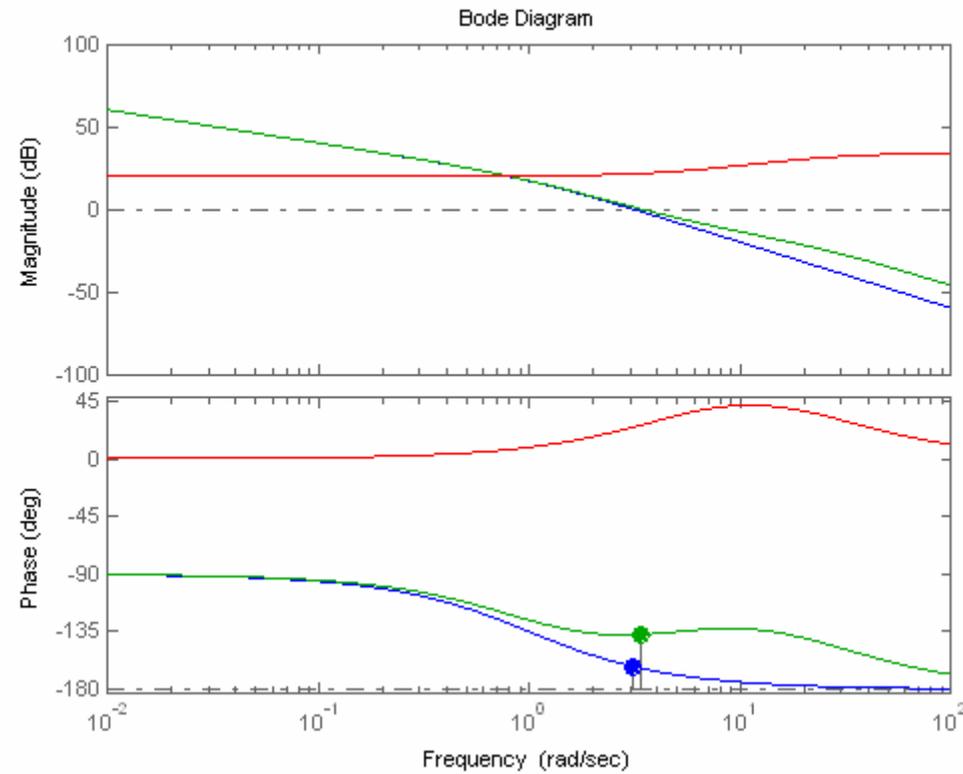
$K=10$ ;  $a = 0.2$ ;  $T=1$ ;





# Ejemplo

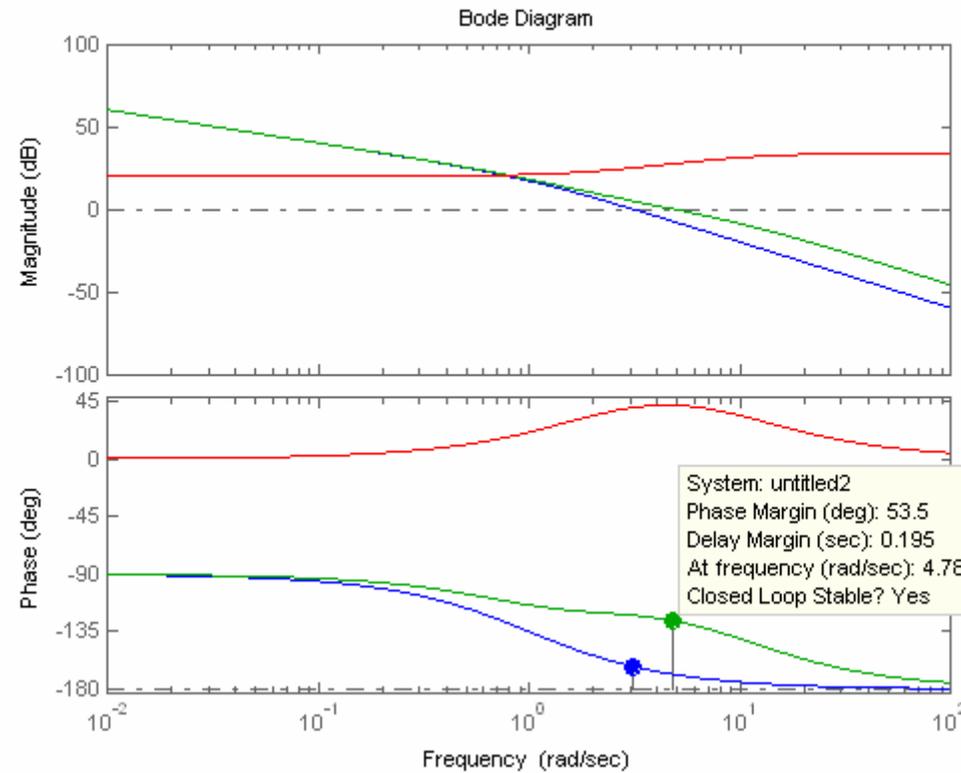
$K=10$ ;  $a = 0.2$ ;  $T=.2$ ;





# Ejemplo

$K=10; a = 0.2; T=.5;$

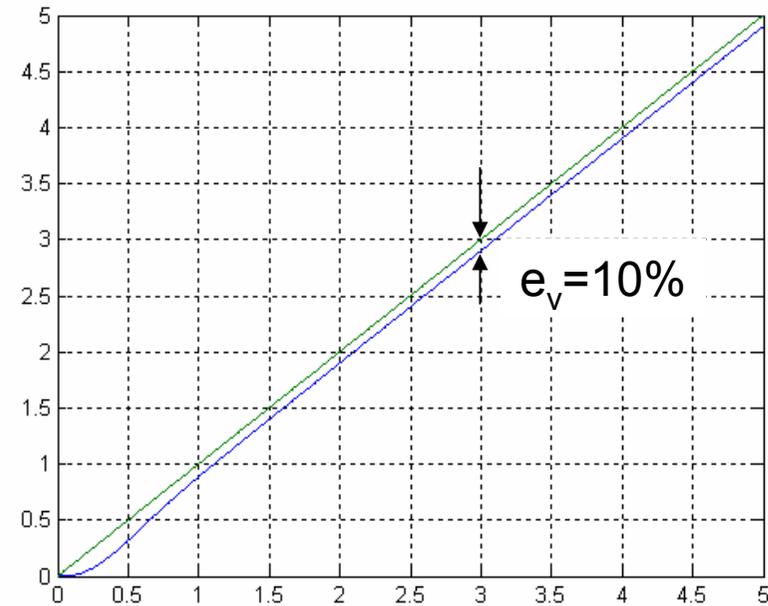
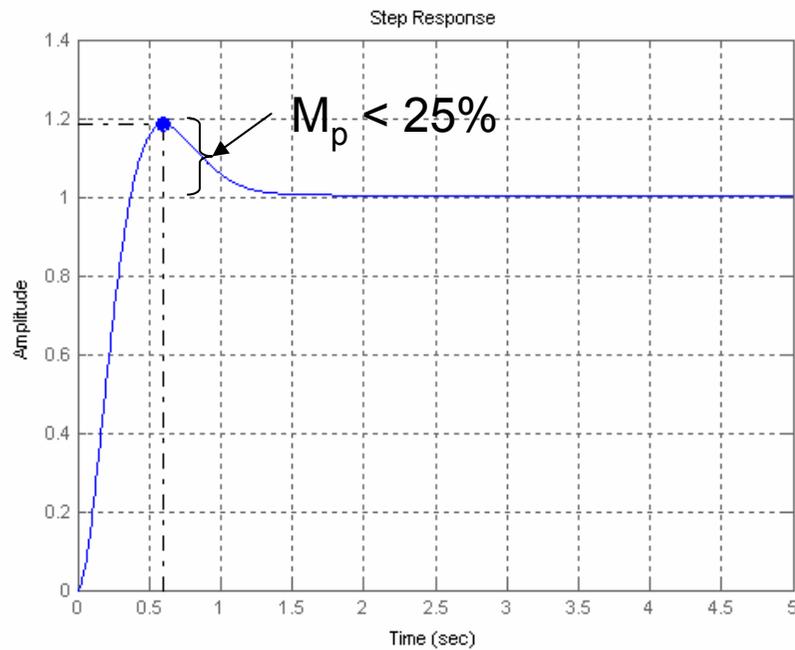


**Controlador final:**  $C(s) = 10 \cdot \frac{0.5s + 1}{0.1s + 1}$



# Ejemplo

## Simulación de la respuesta





# Ejemplo

## Consideraciones finales

- Valores mayores de  $\alpha$  permiten añadir más ángulo, pero producen acciones PD más puras que pueden incrementar el ruido....
- Si necesitamos aportar más de  $60^\circ$  podemos utilizar una doble compensación de adelanto:

$$C(s) = K \left( \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} \right)^2$$

- Si nos piden alguna especificación relacionada con la *velocidad de respuesta* debemos ajustar el ancho de banda del sistema final a través de la  $w_c$



Puede incrementarse jugando con la K



# Red de Adelanto de Fase

## Procedimiento de diseño

1. Determinar la ganancia en bucle abierto  $K$ , necesaria para satisfacer requisitos de reg. permanente
2. Determinar la frecuencia de cruce de ganancia  $\omega_c$  con un factor de seguridad de 2 por debajo del ancho de banda deseado
3. Evaluar el MF necesario aportar al sistema sin compensar,  $K_G$ . Añadir de  $5^\circ$  a  $12^\circ$  extra por seguridad.
4. Determinar  $\alpha$
5. Determinar  $T$  de prueba (trae cuenta elegir como frecuencia central de la red, el punto donde la curva de módulos cae  $20 \cdot \log_{10} |1/\sqrt{\alpha}|$ )
6. Dibujar la respuesta del sistema sin compensar  $K_G(j\omega)$ , y la del sistema compensado  $C(j\omega)G(j\omega)$ . Comprobar el MF e iterar para otro valor de  $T$  si es necesario
7. Comprobar el diseño simulando la respuesta. Añadir otra compensación de adelanto si fuera necesario.

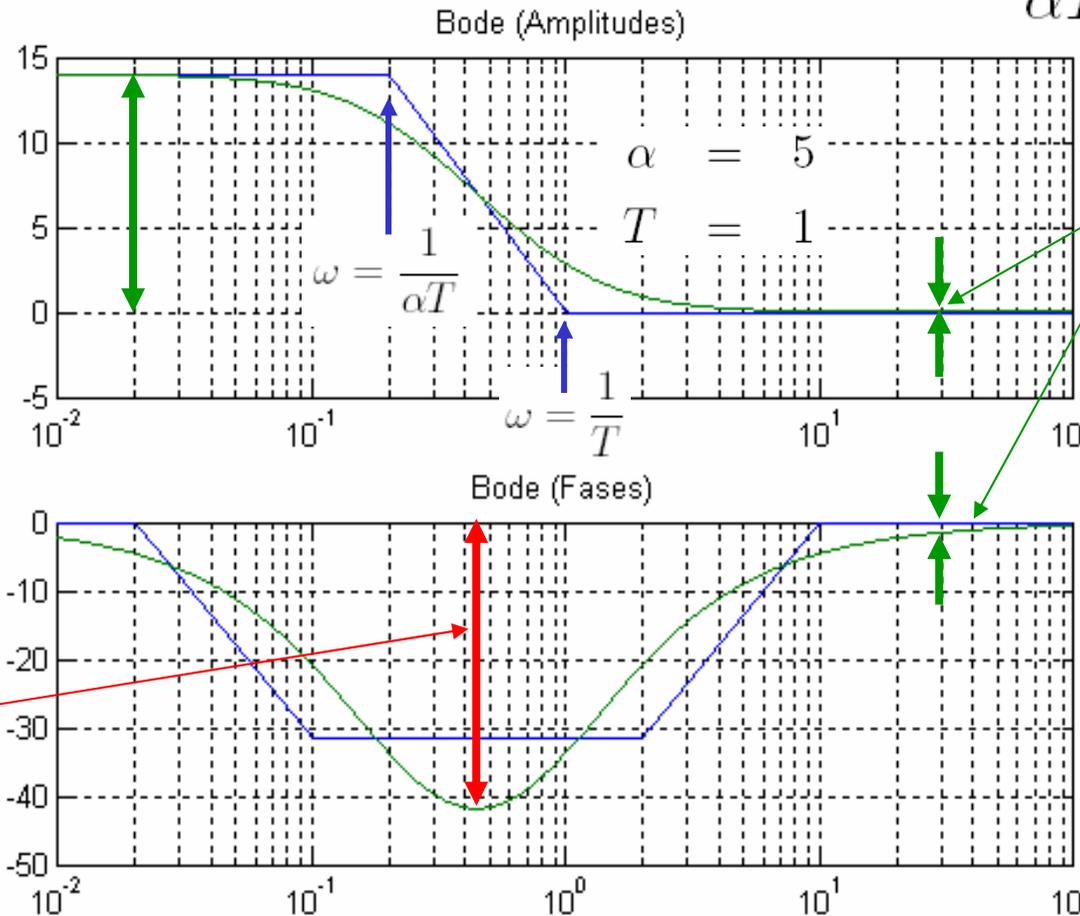


# Red de Retardo de Fase

$$C(s) = \alpha \frac{T s + 1}{\alpha T s + 1}$$

Produce un incremento de la ganancia en bajas frecuencias

...sin afectar a la respuesta del sistema en altas frecuencias

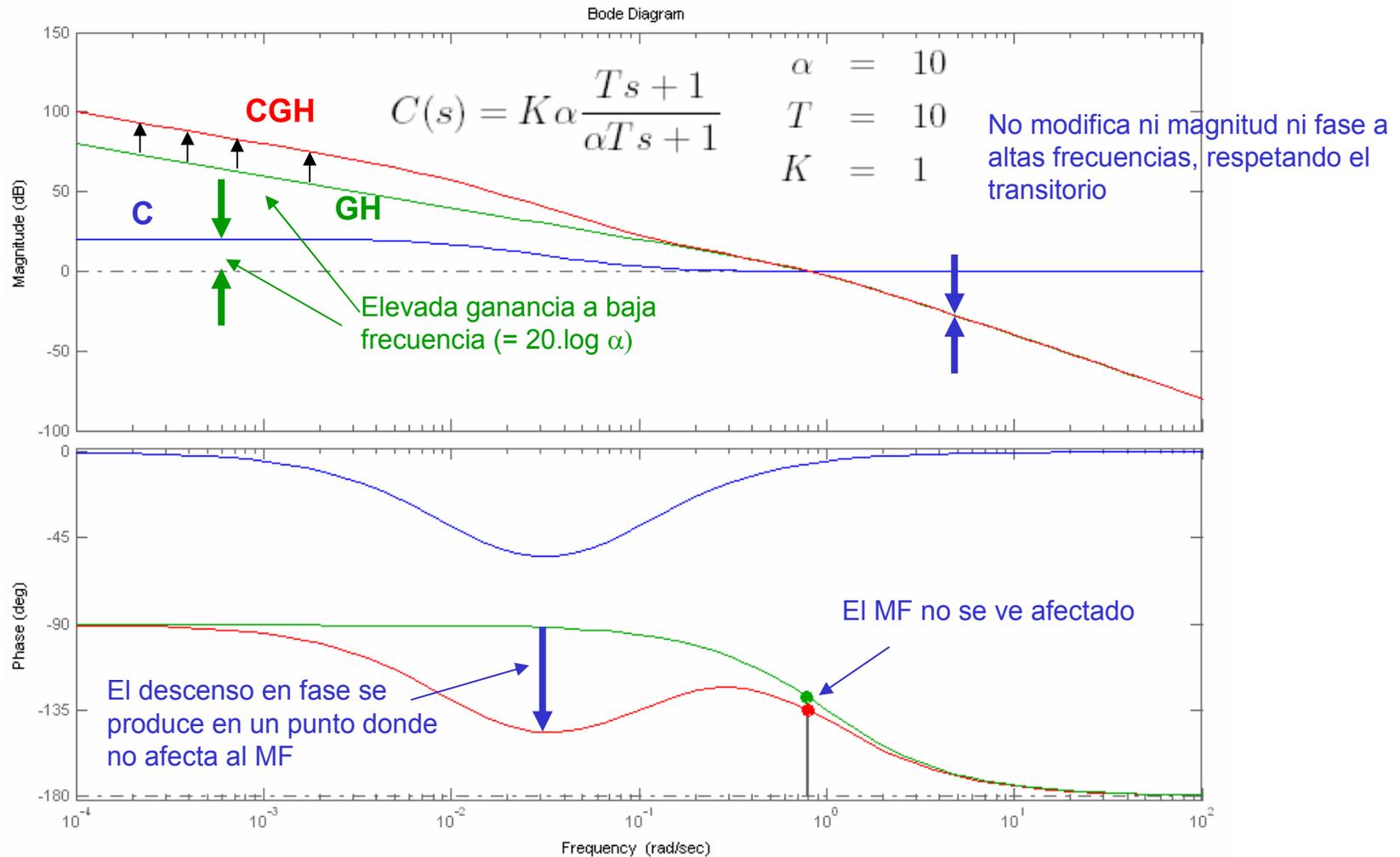


Produce una merma en la fase que tiende a disminuir el MF



# Red de Retardo de Fase

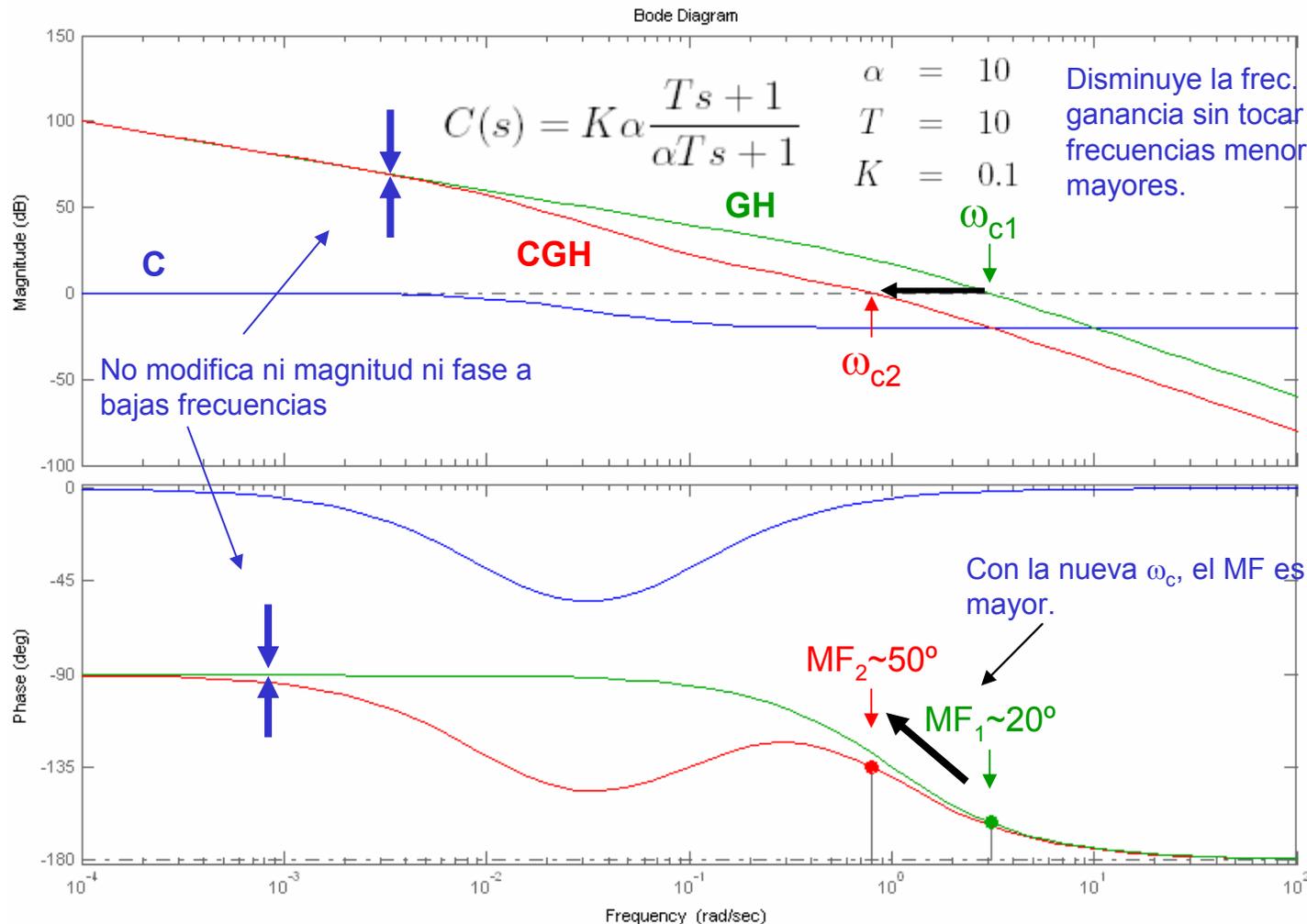
## Incrementando ganancia a bajas frecuencias





# Red de Retardo de Fase

## Incrementando MF a base de disminuir $\omega_c$





# Ejemplo

$$G(s) = \frac{9}{(2s + 1)(s + 1)(0.5s + 1)}$$

Diseñar un compensador para:

$$MF = 25$$

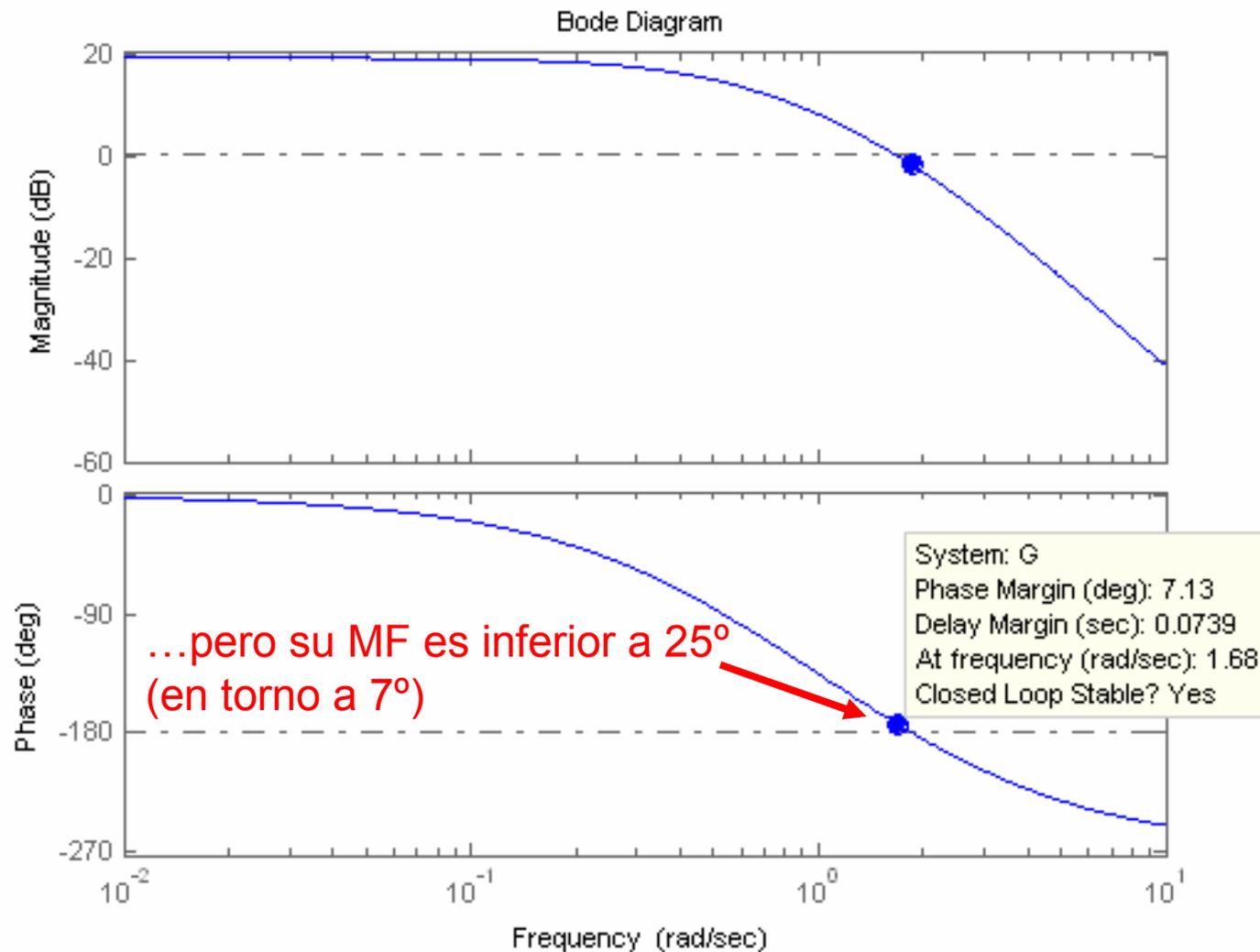
$$K_p \geq 9$$

Vemos que la  $K_p$  del sistema que nos dan es 9...



# Ejemplo

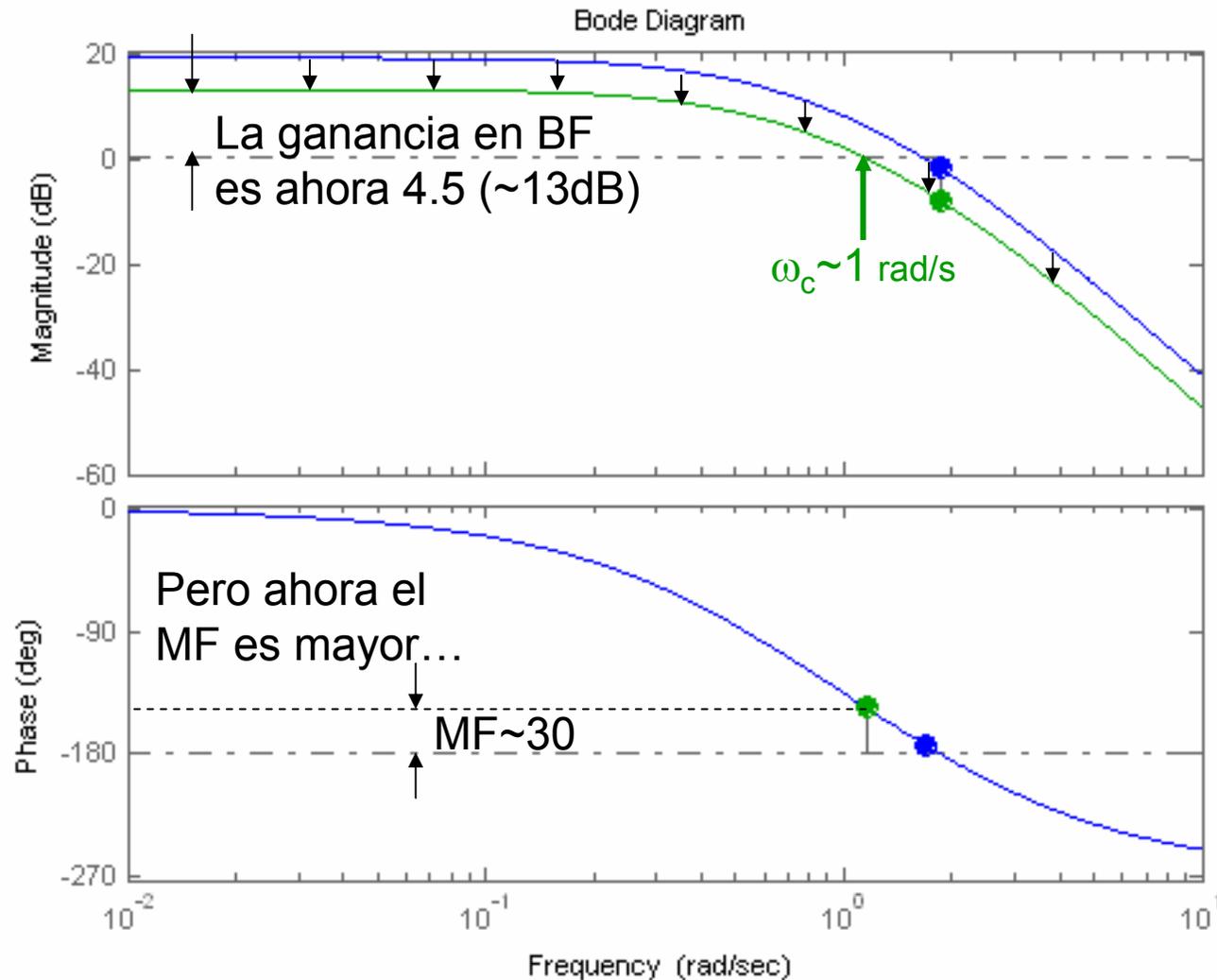
## Bode del sistema sin compensar





# Ejemplo

Disminuyendo la  $K$ , aumentamos MF hasta  $\sim 30^\circ$





Ya tenemos el MF deseado, pero necesitamos restaurar de nuevo la ganancia  $K_p=9$ ... hay que multiplicar por 2 la ganancia en bajas

debemos hacerlo  
sin tocar el MF

Elegimos  $\alpha=2$

La T la elegimos de forma que el codo superior esté entre una octava (dividir por dos) y una década (dividir por 10) por debajo de la nueva frecuencia de cruce  $\omega_c$

... por ejemplo,  
lo intentamos con  $1/5$  de  $\omega_c$

$$\omega_c \sim 1 \longrightarrow 1/T = 1/5 \longrightarrow T=5$$



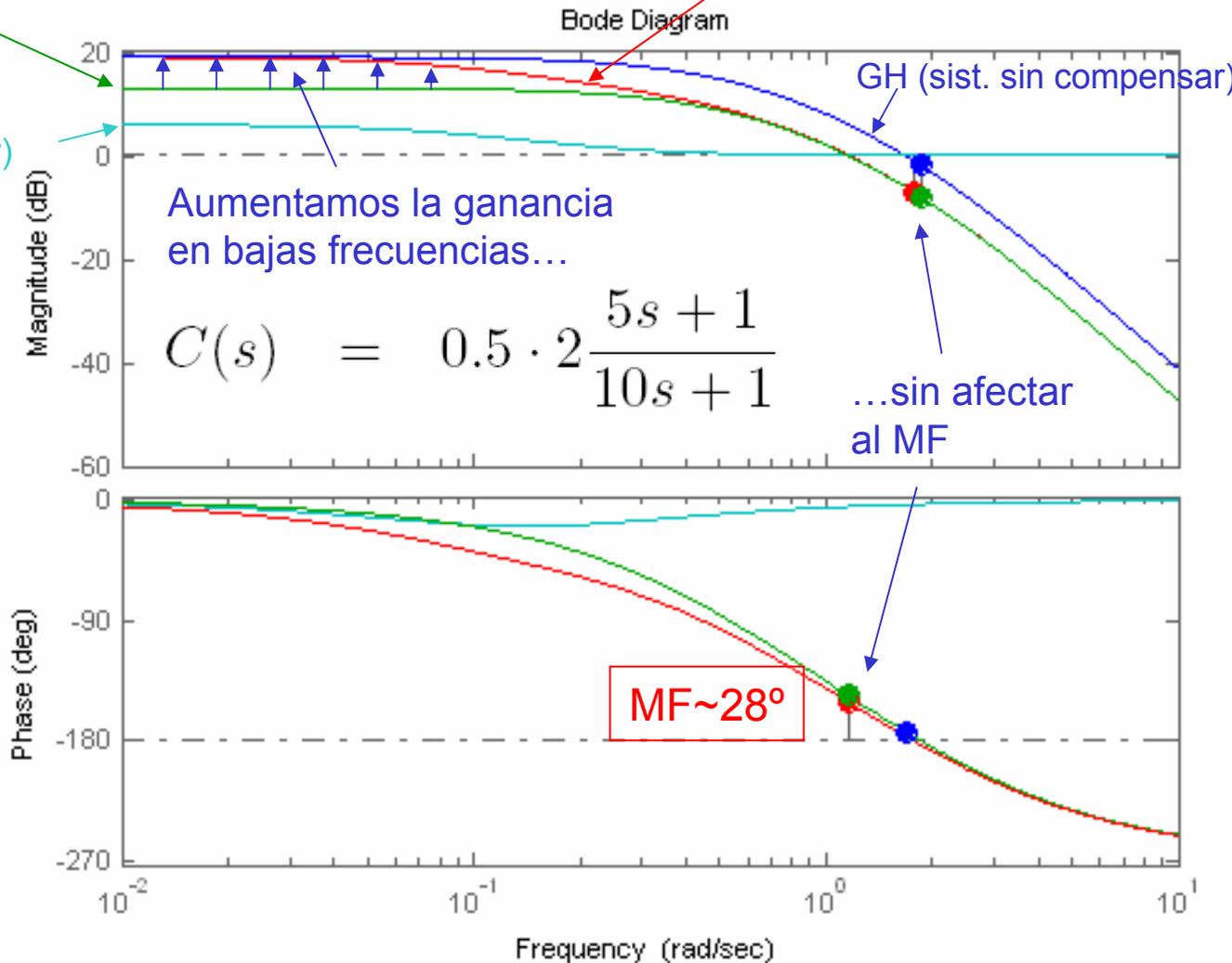
# Ejemplo

## Aplicando la red de Retraso

KGH (sist. con compensado proporcional)

C (Compensador)

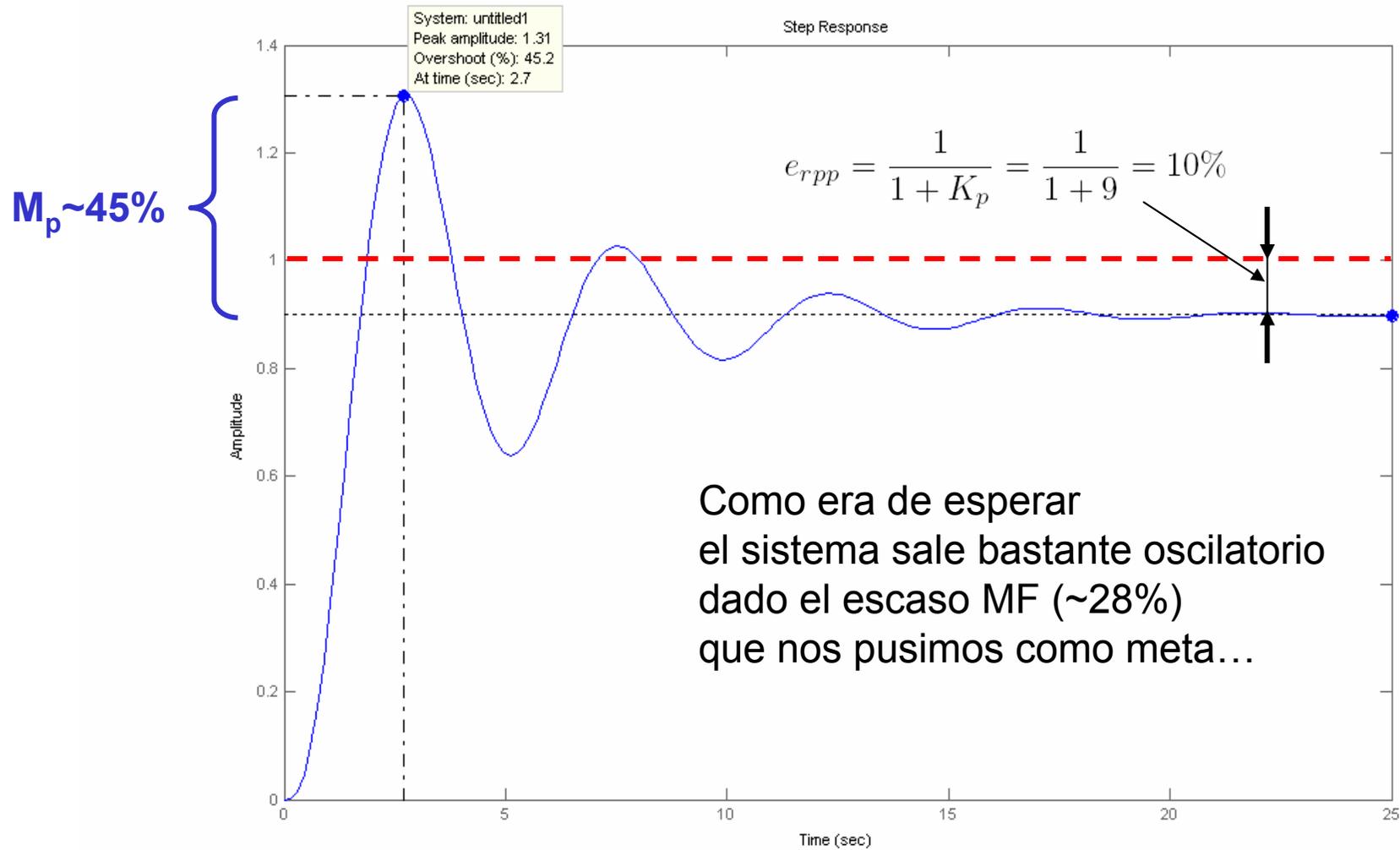
CGH (sist. compensado)





# Ejemplo

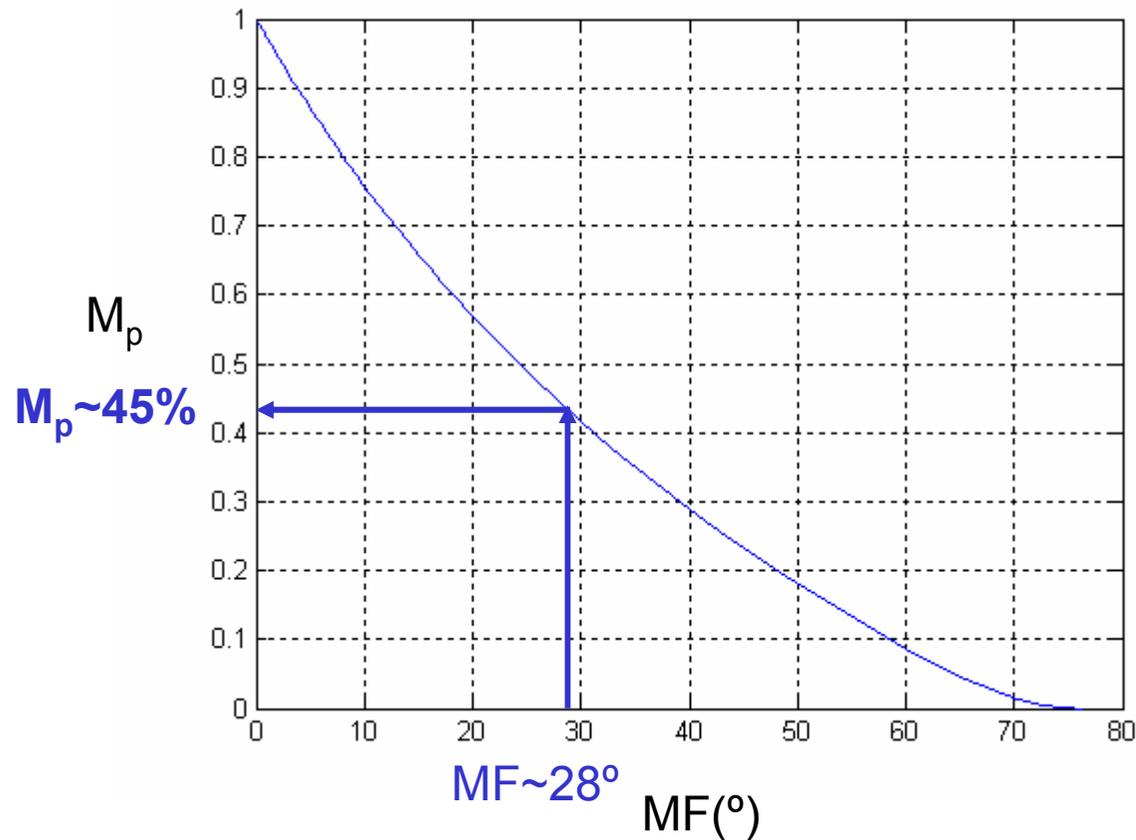
## Simulación ante un escalón





# Ejemplo

Calculamos la sobreoscilación que tendrá el sistema





# Red de Retardo de Fase

## Procedimiento de diseño

1. Determinar la ganancia en bucle abierto  $K$ , necesaria para satisfacer el MF sin emplear otra compensación
2. Dibujar el Bode del sistema con la compensación proporcional anterior ( $KGH$ ) y evaluar la ganancia en baja frecuencia y la nueva  $\omega_c$
3. Determinar  $\alpha$  necesario para conseguir la ganancia en baja frecuencia requerida por las especificaciones de permanente
4. Determinar  $T$  de prueba eligiendo como frecuencia de corte superior  $\omega=1/T$  en torno a una octava ( $1/2$ ) o una década ( $1/10$ ) por debajo de la  $\omega_c$  determinada en el segundo punto
5. La frecuencia de corte inferior estará a  $\omega= 1/(\alpha T)$
6. Comprobar el diseño simulando la respuesta y retocando las elecciones de puntos anteriores si es preciso.



# Compensación PID

Forma Básicas:

$$C(s) = \frac{K}{s} \left[ (T_D s + 1) \left( s + \frac{1}{T_I} \right) \right]$$

$$C(s) = K \frac{T_d s + 1}{\alpha T_d s + 1} \beta \frac{T_i s + 1}{\beta T_i s + 1}$$



# Compensación PID

## Procedimiento de diseño

- Diseñar las dos partes secuencialmente
- Diseñar las dos partes en conjunto  
Parámetros a diseñar ( $\alpha$ ,  $T_d$ ,  $\beta$ ,  $T_i$ ,  $K$ )

### ∃ Procedimientos Específicos

Diseño conjunto:

Cfr. [Puentes91], [Blasco00],[Franklin94]

Método empíricos:

Cfr. Metodo de Ziegler-Nichols [Ogata]



# Compensación PID

Ejemplo [cfr. Franklin, pp. 408 y ss]

$$G(s) = \frac{0.9}{s^2}$$

$$H(s) = \frac{2}{s + 2}$$

Diseñar PID para obtener:

$$e_{\text{rpp}} \sim 0$$

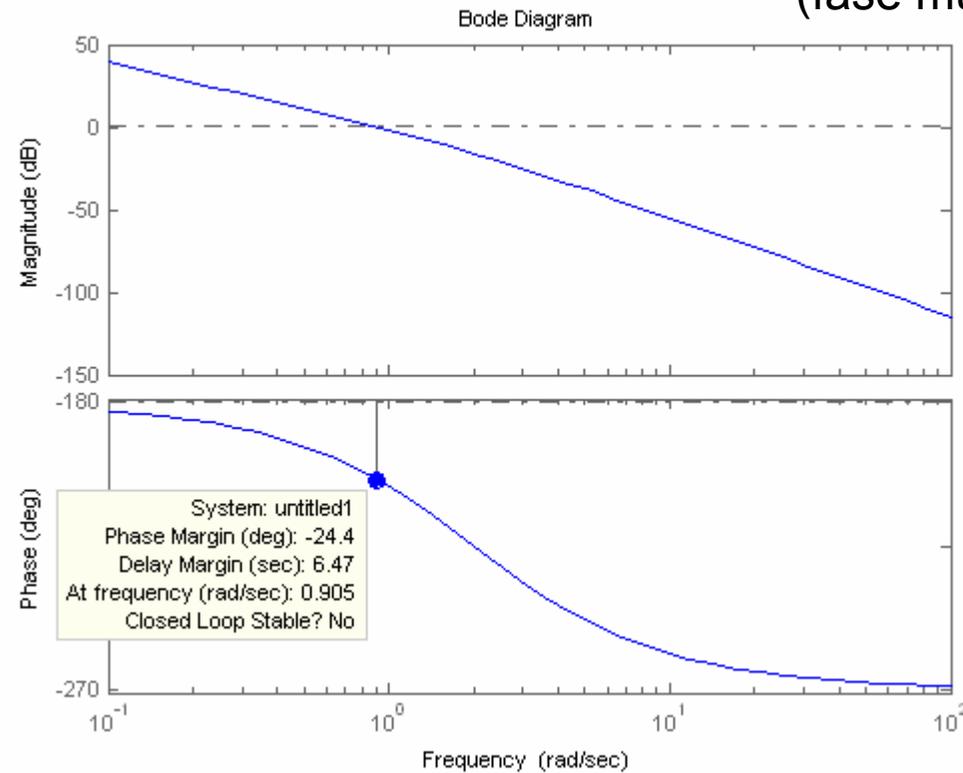
$$\text{MF} \sim 65^\circ$$



# Compensación PID

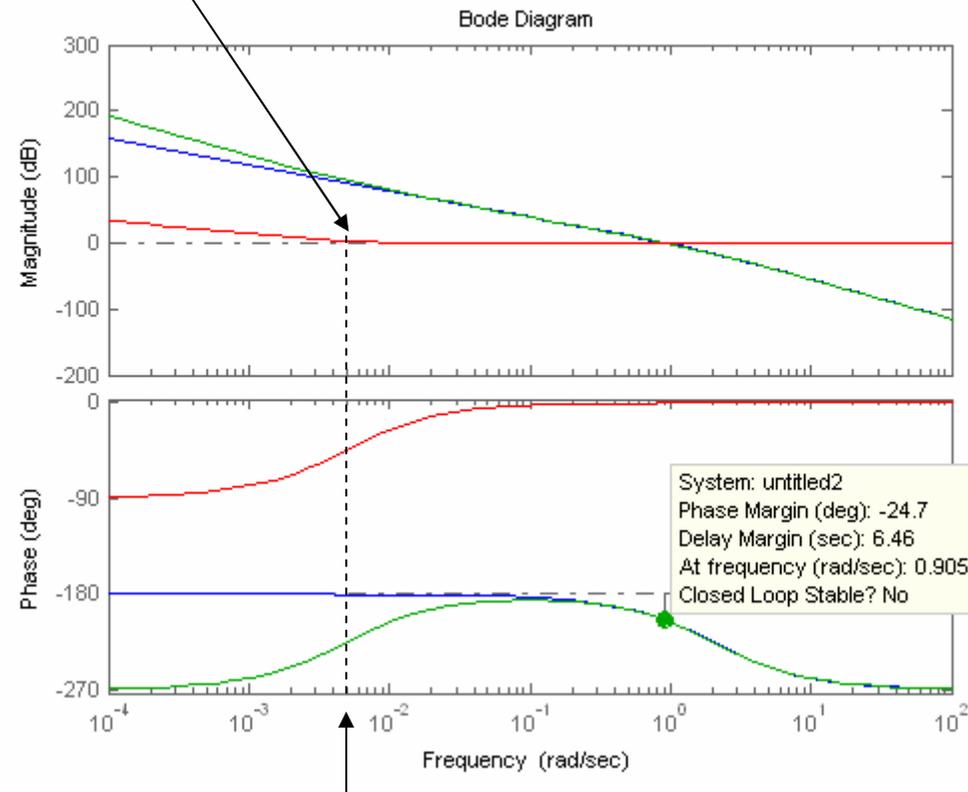
## Ejemplo

El sistema es altamente inestable al realimentar (fase muy negativa)





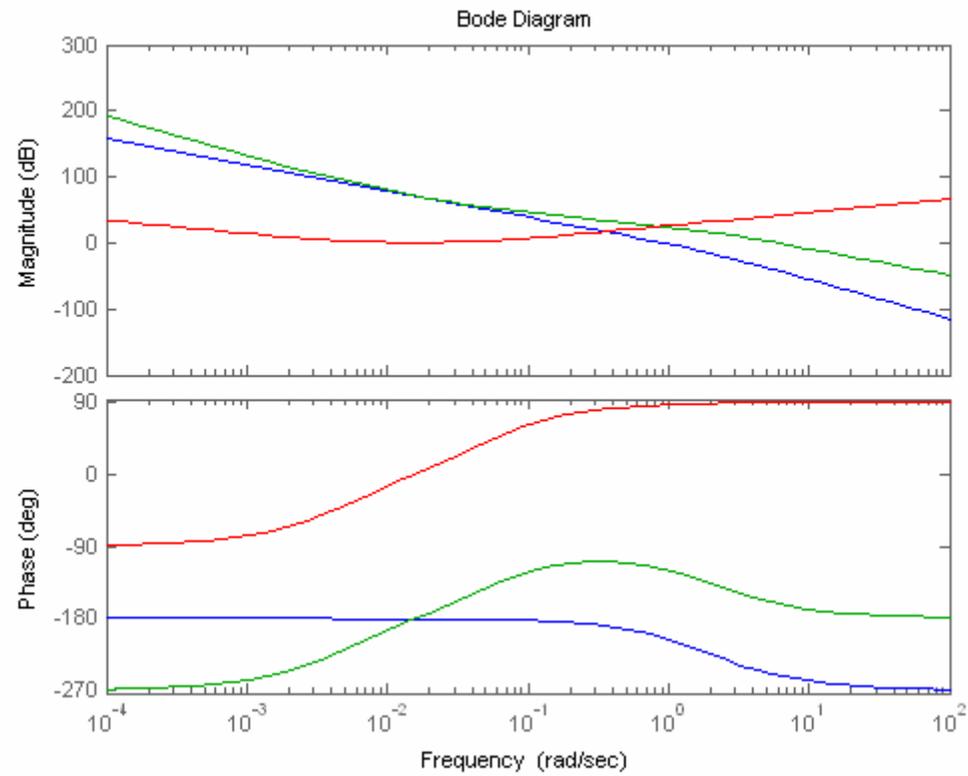
$T_d = 0, T_i = 200$



$1/T_i = 0.005$

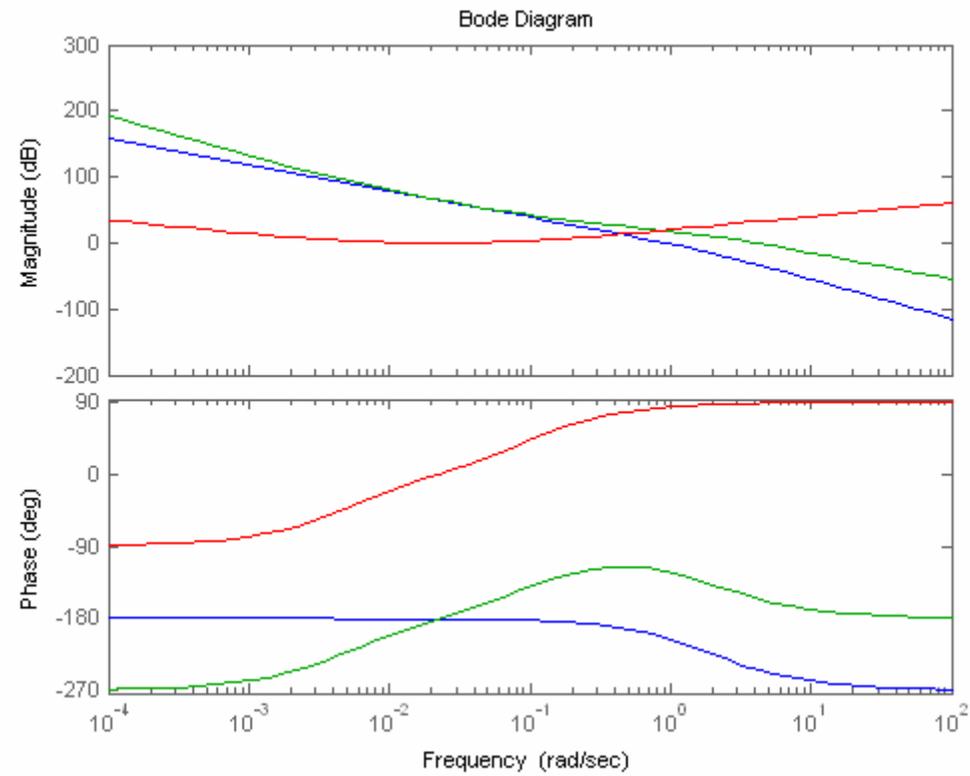


$T_d = 20, T_i = 200$



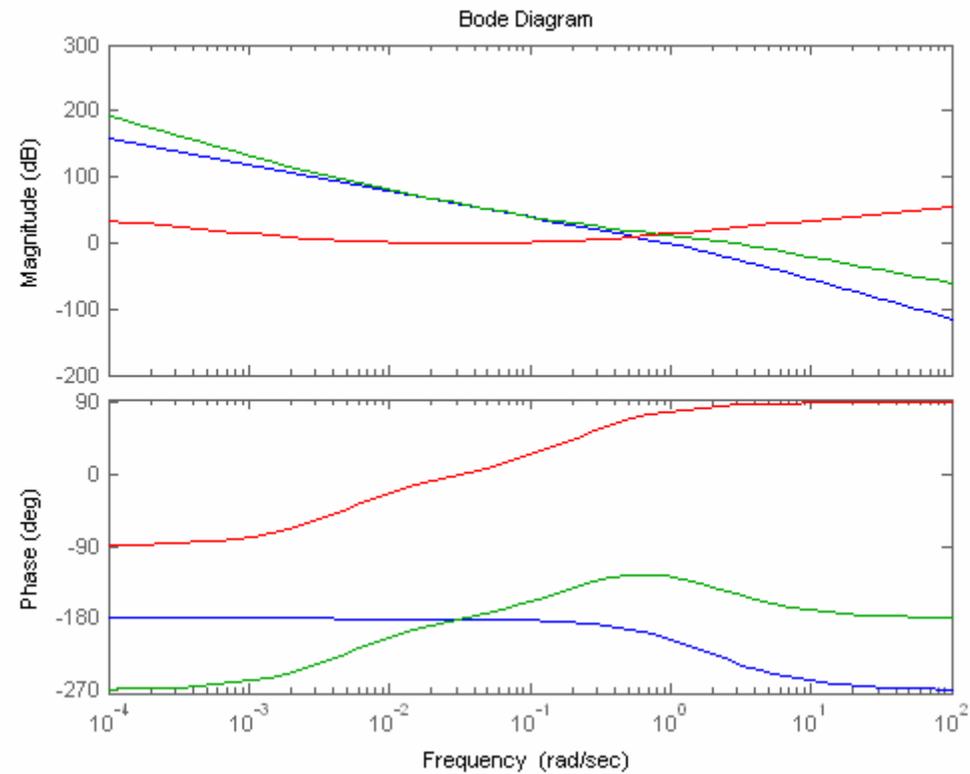


$T_d=10, T_i=200$



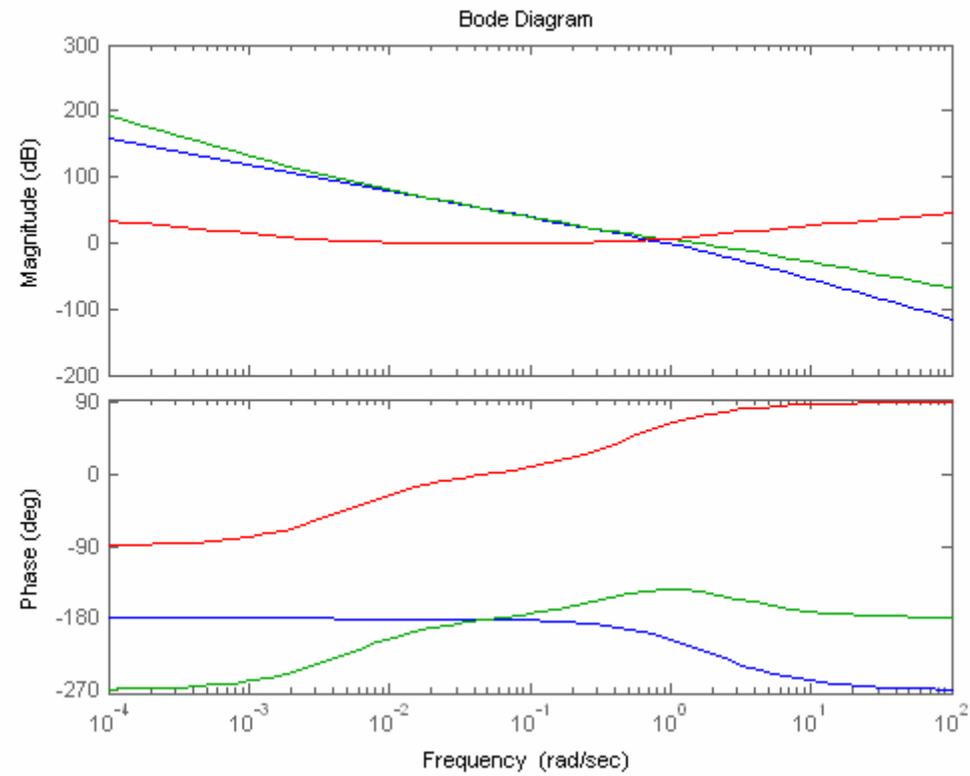


$T_d=5, T_i=200$





$T_d=2, T_i=200$





$T_d=10, T_i=200$

Hay que bajar la línea verde hasta el 0db sin tocar la fase

