



Introducción al Control Digital.

Sistemas Automáticos

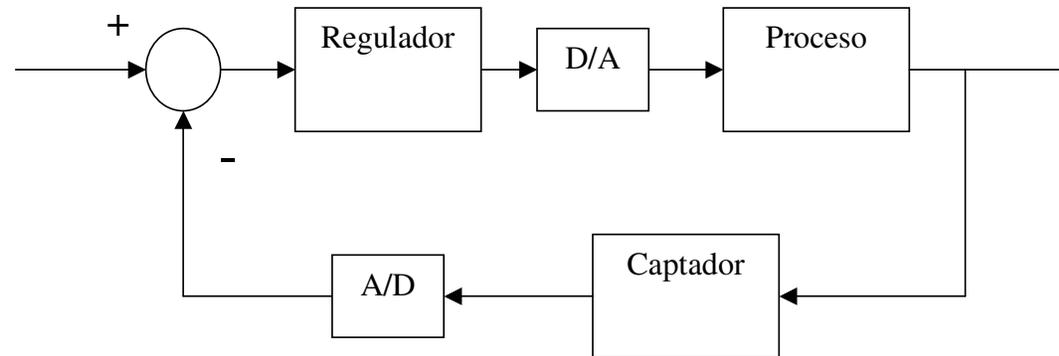
Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad de Oviedo



Concepto de muestreo. Definición.

El control digital es una implementación de control empleando lógica programada



- Conversores analógico-digitales (A/D): Convierten la información analógica del proceso $y(t)$ aportada por los captadores al formato digital (secuencias de números y_k) para poder ser procesadas mediante un algoritmo de control.
- Regulador digital: Ejecuta un algoritmo de control que calcula a partir del error cometido $e_k = r_k - y_k$ en cada instante una acción de control u_k
- Conversores digital-analógicos (D/A): Generan de la señal de control continua $u_r(t)$ a partir de la secuencia digital u_k



Concepto de muestreo. Definición.

Ventajas:

- No hay límite de complejidad del algoritmo
- Facilidad de cambio de estrategia
- Precisión más elevada en operaciones que con dispositivos analógicos (resolución, derivas, saturaciones).
- Posibilidad de efectuar funciones complementarias (almacenamiento, análisis, comunicaciones)

Inconvenientes:

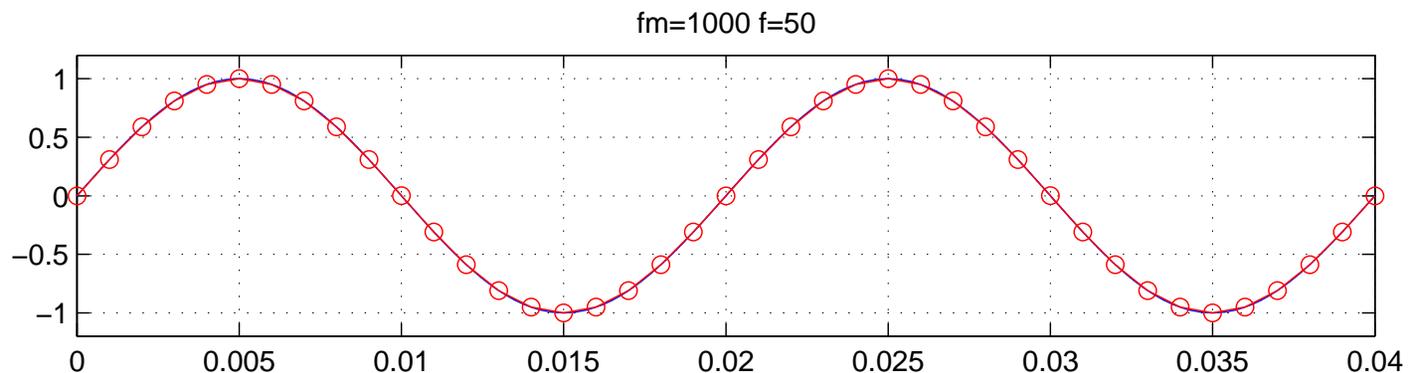
- Existe pérdida de información en el muestreo (A/D) y en la reconstrucción (D/A) por aliasing, cuantificación, retardos originados en la reconstrucción y otros problemas.
- Mayor complejidad en el diseño. Requiere dispositivos electrónicos para la ejecución del algoritmo de control (microcontrolador, DSP, PC, etc.) así como para la adquisición de datos y la reconstrucción (convertidores A/D y D/A).
- Requieren, a menudo elementos para evitar estos problemas (ej.: filtros antialiasing)
- Plantea compromisos economía/eficiencia en diversos aspectos (frecuencia de muestreo, resolución en bits de los convertidores, etc).
- Un simple fallo informático (desbordamiento, bloqueo del sistema) puede resultar fatal.

Concepto de muestreo. Definición.

El muestreo es una operación en la que se obtiene una secuencia de valores a partir de una señal analógica.

$$x(t) \rightarrow \{x_k\}, \quad x_k = x(kT_m), \quad \forall k = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$$

donde T_m es el *periodo de muestreo* y $f_m = \frac{1}{T_m}$ es la *frecuencia de muestreo*



En la figura adjunta se muestra una senoide de 50 Hz muestreada con un periodo de muestreo $T = 0,001$ s.



Concepto de muestreo. Aliasing.

- Cuando la frecuencia de muestreo es insuficiente pueden surgir problemas de aliasing
- El problema viene porque la evolución de la señal entre muestra y muestra se pierde
- Puede demostrarse que para una señal senoidal de frecuencia f , la frecuencia de muestreo debe ser mayor que el doble de ésta ($f_m > 2f$) para no perder información.



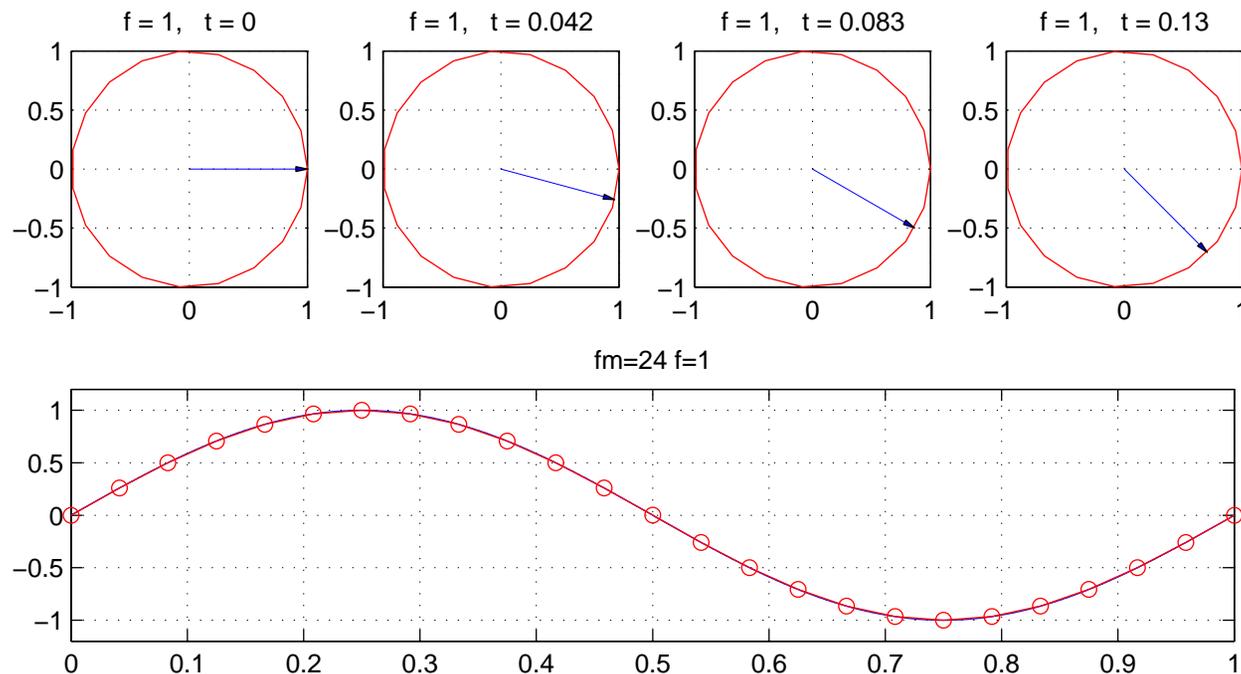
Concepto de muestreo. Aliasing. Ejemplo cine.

El cine es un ejemplo de proceso de muestreo a $f_m = 24$ Hz.

Supongamos la filmación de una rueda girando en sentido horario a distintas velocidades.

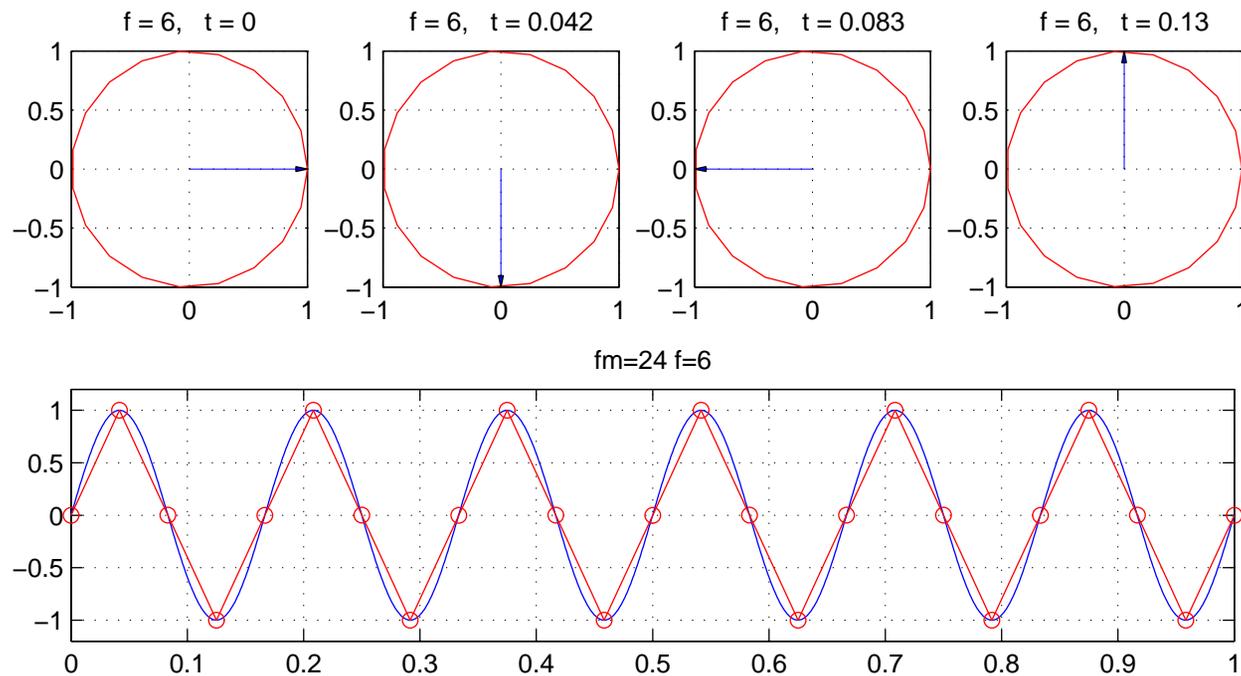
Concepto de muestreo. Aliasing. Ejemplo cine.

Caso 1. Rueda girando a 1 Hz: No hay aliasing. Se puede ver la frecuencia y el sentido de giro de la rueda perfectamente.



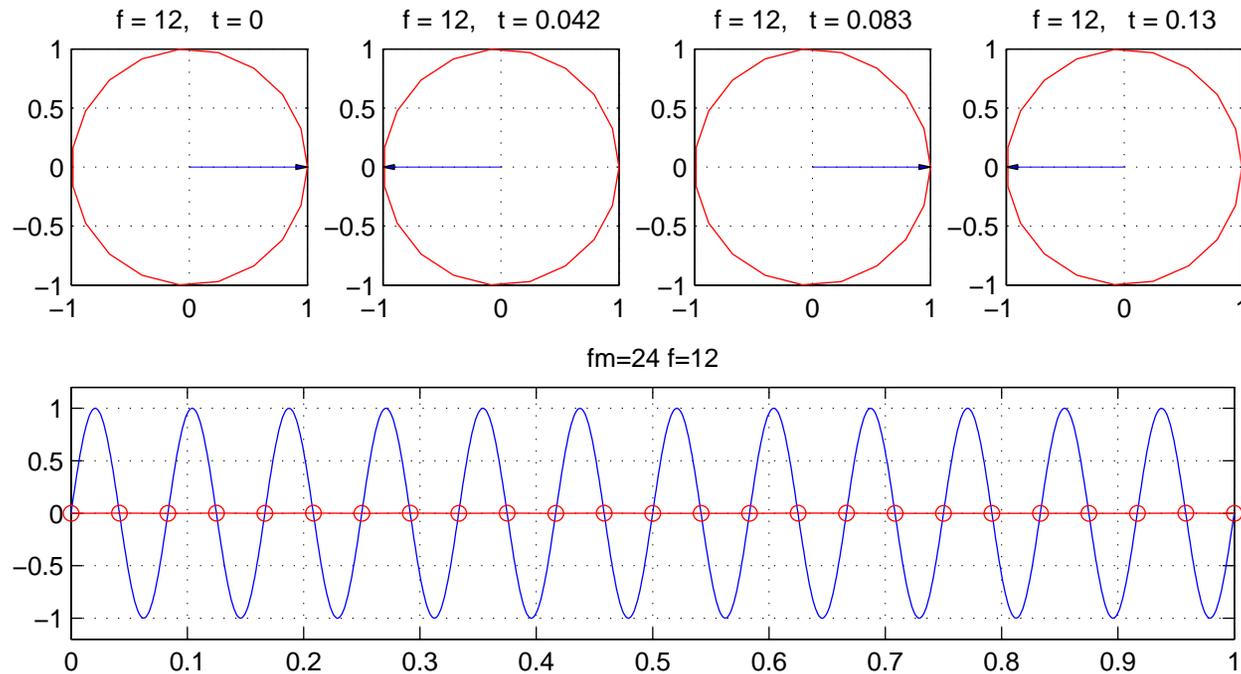
Concepto de muestreo. Aliasing. Ejemplo cine.

Caso 2. Rueda girando a 6 Hz: No hay aliasing. Aunque se pierde precisión aún se puede ver la frecuencia y el sentido de giro de la rueda.



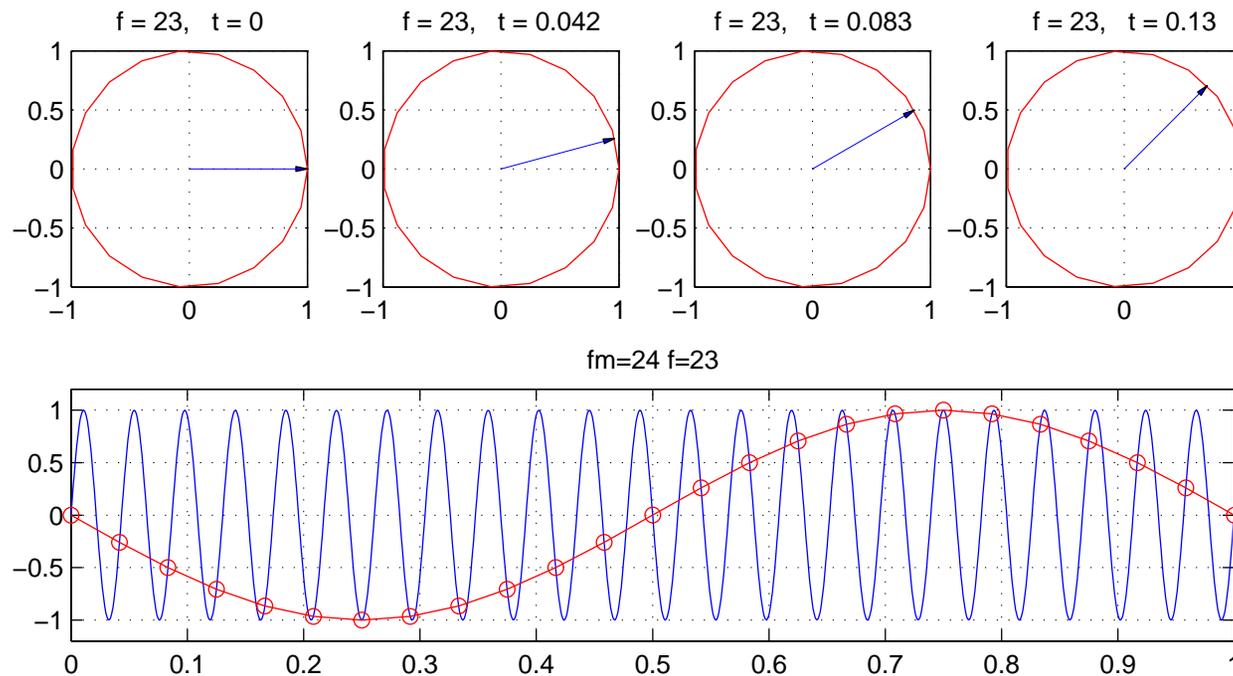
Concepto de muestreo. Aliasing. Ejemplo cine.

Caso 3. Rueda girando a 12 Hz: A partir de este punto se pierde la noción del sentido de giro. No sabemos hacia dónde gira la rueda, hemos perdido esa información



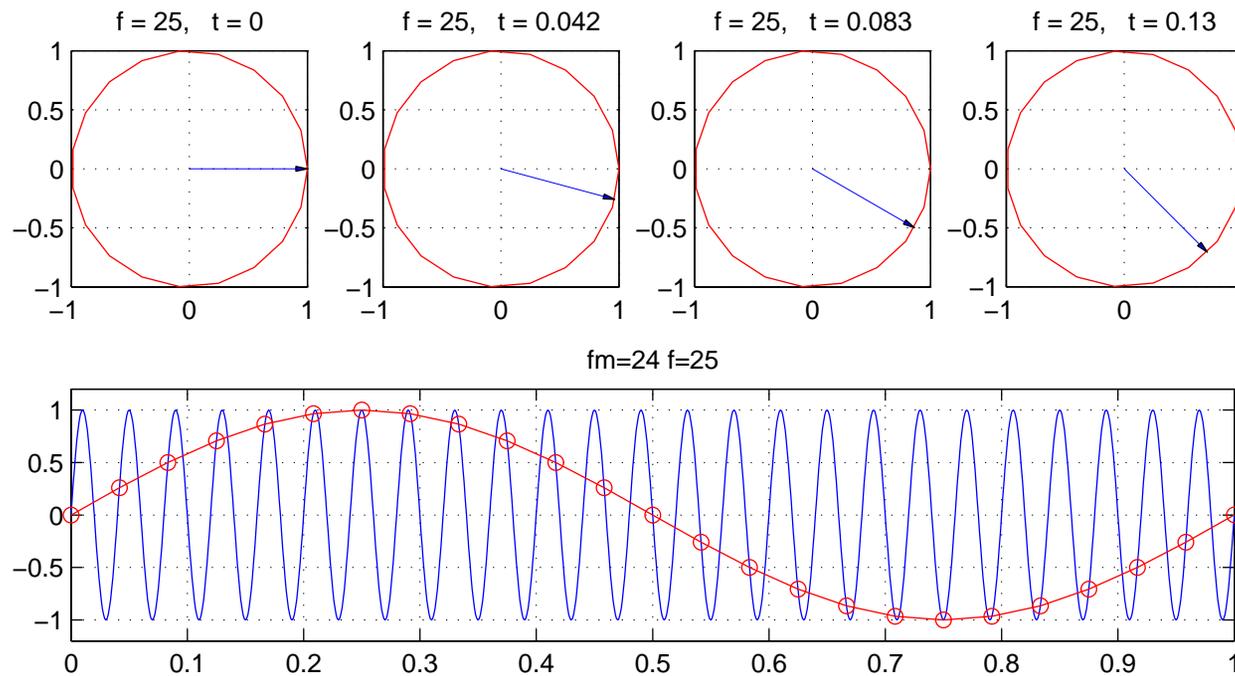
Concepto de muestreo. Aliasing. Ejemplo cine.

Caso 4. Rueda girando a 23 Hz: Hay aliasing. La rueda gira tan rápido que le da tiempo casi a completar una vuelta antes de ser fotografiada de nuevo. Para el espectador gira en sentido contrario y despacio (gira exactamente a -1 Hz).



Concepto de muestreo. Aliasing. Ejemplo cine.

Caso 5. Rueda girando a 25 Hz: Hay aliasing. La rueda gira 1 Hz más rápido que la frecuencia de muestreo y le da tiempo casi a completar $1 + \frac{1}{24}$ vueltas antes de ser fotografiada de nuevo. Para el espectador gira a +1 Hz.





Concepto de secuencia.

Una secuencia es una serie infinita de números

$$\{x_k\} = \{\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\}$$

El resultado del muestreo es una secuencia

$$x(t) \rightarrow x_k = x(kT_m) \rightarrow \{x_k\}$$



Concepto de secuencia. Operaciones básicas.

Las secuencias pueden entenderse como vectores de infinitos elementos y pueden definirse operaciones con ellos

- Operaciones lineales

$$\{z_k\} = \alpha\{x_k\} + \beta\{y_k\}, \quad z_k = \alpha x_k + \beta y_k, \quad \forall k$$

- Operación de adelanto (z es un operador de adelanto)

$$z \cdot \{x_k\} \rightarrow \{x_{k+1}\}$$

- Operación de retraso (z^{-1} es un operador de retraso)

$$z^{-1} \cdot \{x_k\} \rightarrow \{x_{k-1}\}$$

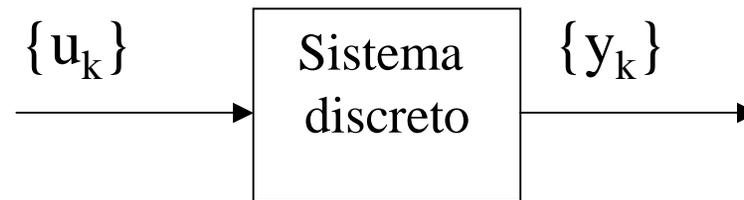
- Las operaciones de adelanto/retraso se pueden encadenar

$$z^{-n} \cdot \{x_k\} = z^{-1} \cdots z^{-1} \{x_k\} = \{x_{k-n}\}$$



Concepto de sistema discreto.

Un sistema discreto toma una secuencia discreta de entrada y produce otra secuencia discreta de salida.



$$\{y_k\} = \mathcal{G}(\{x_k\})$$



Transformada Z.

Se define la transformada Z de una secuencia $\{x_k\}$ como

$$X(z) = \mathcal{Z}(\{x_k\}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}, \quad z \in C$$

Propiedades:

- Linealidad

$$\mathcal{Z}[\alpha\{x_k\} + \beta\{y_k\}] = \alpha\mathcal{Z}[\{x_k\}] + \beta\mathcal{Z}[\{y_k\}]$$

- Desplazamiento

$$\mathcal{Z}[\{x_{k+1}\}] = z\mathcal{Z}[\{x_k\}] = zX(z)$$

$$\mathcal{Z}[\{x_{k-1}\}] = z^{-1}\mathcal{Z}[\{x_k\}] = z^{-1}X(z)$$



Concepto de función de transferencia discreta. Ecuación en diferencias.

Una ecuación en diferencias viene dada por el siguiente algoritmo:

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_m u_{k-m}$$

Una ecuación en diferencias es un sistema discreto, ya que dada una secuencia de entrada, $\{u_k\}$, permite calcular una secuencia de salida $\{y_k\}$

$$\{u_k\} \rightarrow [\text{ecuación en diferencias}] \rightarrow \{y_k\}$$



Concepto de función de transferencia discreta. Ecuación en diferencias.

Aplicando la transformada \mathcal{Z} a la ecuación en diferencias

$$\mathcal{Z}\{y_k + a_1 y_{k-1} + \cdots + a_n y_{k-n}\} = \mathcal{Z}\{b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \cdots + b_m u_{k-m}\}$$

$$\mathcal{Z}\{y_k\} + a_1 \mathcal{Z}\{y_{k-1}\} + \cdots + a_n \mathcal{Z}\{y_{k-n}\} = b_0 \mathcal{Z}\{u_k\} + b_1 \mathcal{Z}\{u_{k-1}\} + \cdots + b_m \mathcal{Z}\{u_{k-m}\}$$

$$Y(z) + a_1 z^{-1} Y(z) + \cdots + a_n z^{-n} Y(z) = b_0 U(z) + b_1 z^{-1} U(z) + \cdots + b_m z^{-m} U(z)$$

$$\left(1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}\right) \cdot Y(z) = \left(b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}\right) \cdot U(z)$$

$$Y(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}} \cdot U(z)$$



Concepto de función de transferencia discreta. Ecuación en diferencias.

Existe, por tanto una correspondencia uno a uno entre la ecuación en diferencias y la función de transferencia discreta:

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$



$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_n y_{k-n} = b_0 u_k + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m}$$

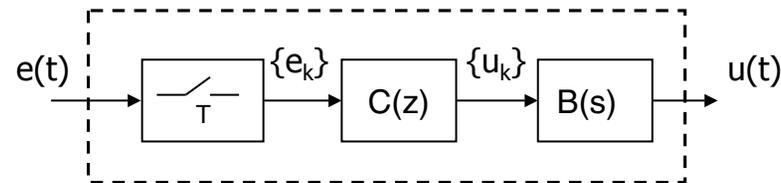


$$y_k = \sum_{i=0}^m b_i u(k-i) - \sum_{i=1}^n a_i y(k-i)$$



Discretización de reguladores continuos por emulación.

El objetivo es obtener un regulador discreto que aproxime el funcionamiento de un regulador continuo $C(s)$ previamente diseñado.



Pasos en el diseño por emulación:

1. Diseño de un controlador continuo $C(s)$ empleando cualquiera de las técnicas descritas (lugar de las raíces, técnicas frecuenciales, Ziegler-Nichols, etc.)
2. Elección del periodo de muestreo T_m considerando el compromiso entre el coste del hardware e impacto en el desempeño del sistema de control
3. Discretizar el regulador obtenido obteniendo a partir de $C(s)$ un regulador discreto $C(z)$ que aproxime su funcionamiento.
4. Obtener de $C(z)$ directamente el algoritmo de control (la ecuación en diferencias). El algoritmo de la ecuación en diferencias puede ser implementado en cualquier lenguaje que soporte el hardware que ejecutará el control (C, C++, ...)
5. Verificar el diseño mediante simulación o experimentación.



Discretización de reguladores continuos por emulación. Método de Euler.

En Laplace la variable s puede verse como el operador derivada y $1/s$ puede verse como el operador integral.

Es posible obtener una ecuación en diferencias que aproxime a una ecuación diferencial sustituyendo dichos operadores por aproximaciones numéricas que emplean retardos z^{-1} y adelantos, z de las variables.

Supongamos que intentamos aproximar la derivada de $e(t)$

$$u(t) = \frac{d}{dt}e(t)$$

Diferencia hacia atrás

$$\begin{aligned} \frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e_k - e_{k-1}}{T_m} &\rightarrow sE(s) \approx \frac{1 - z^{-1}}{T_m} E(z) = \frac{z - 1}{zT_m} E(z) \rightarrow \\ &\rightarrow s \approx \frac{z - 1}{zT_m} \end{aligned}$$

Diferencia hacia adelante

$$\frac{de(t)}{dt} \approx \frac{e_{k+1} - e_k}{T_m} \rightarrow s \approx \frac{z - 1}{T_m}$$

Discretización de reguladores continuos por emulación. Método de Tustin.

Supongamos que intentamos aproximar la integral de $e(t)$:

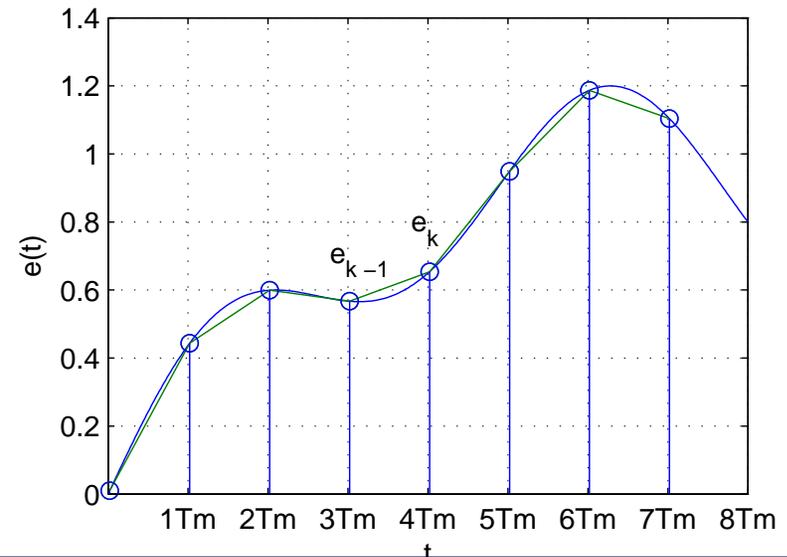
$$u(t) = \int_0^t e(t) dt$$

Un procedimiento consiste en sumar el area de los trapecios que se forman entre dos valores consecutivos e_{k-1} y e_k

$$u_k = u_{k-1} + T_m \cdot \frac{e_k + e_{k-1}}{2}$$

expresado mediante la transformada Z

$$U(z) = z^{-1}U(z) + T_m \cdot \frac{E(z) + z^{-1}E(z)}{2}$$



$$U(s) = \frac{1}{s} E(s) \quad \rightarrow \quad U(z) = \left(\frac{T_m}{2} \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}} \right) E(z)$$

$$\text{por tanto, } s \approx \frac{2}{T_m} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$



Discretización de reguladores continuos por emulación. Obtención de la ecuación en diferencias.

Para obtener el algoritmo del controlador digital basta sustituir s por las expresiones anteriores

$$C_{eul}(z) = C(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{T_m}}$$

$$C_{eul}(z) = C(s) \Big|_{s = \frac{z-1}{zT_m}}$$

$$C_{tus}(z) = C(s) \Big|_{s = \frac{T_m}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}}$$

Una vez se dispone de la función de transferencia discreta la ecuación en diferencias se obtiene directamente a partir de los coeficientes de $C(z)$



Discretización de reguladores continuos por emulación. Obtención de la ecuación en diferencias. Ejemplo.

Suponiendo que diseñamos el siguiente regulador continuo

$$C(s) = 121,33 \cdot \frac{s + 10}{s + 30}$$

Empleando la aproximación de Euler $s \approx \frac{z-1}{T_m}$ (diferencia hacia adelante) se obtiene

$$C(z) = 121,33 \cdot \frac{z - 1 + 10T_m}{z - 1 + 30T_m} = 121,33 \cdot \frac{z - 0,9}{z - 0,7}$$

La ecuación en diferencias asociada es

$$u_k = 0,7u_{k-1} + 121,33e_k - 0,9 \cdot 121,33e_{k-1}$$

El algoritmo de control resultante de la ecuación en diferencias es

```
hacer cada 10 ms
  LEER r,y
  e = r-y
  u = 0.7*up + 121.33*e - 121.33*0.9*ep

  ESCRIBIR u
  up = u      % Almacenamos entrada pasada (en k-1)
  ep = e      % Almacenamos error pasado (en k-1)
f_hacer
```



Cuantificación.

Cuando se intenta representar un número real con un número finito de bits, se produce un error de cuantificación.

En el control digital este error aparece en tres lugares:

- En la conversión (A/D y D/A).
- En los cálculos. Importante en coma fija con 16 bits o menos.
- En los parámetros de la ecuación en diferencias. Aumenta la sensibilidad con órdenes elevados, y cuando los polos o ceros se aproximan a la zona de inestabilidad.



Cuantificación en la conversión A/D y D/A.

En la conversión A/D a cada valor analógico se le asigna un código numérico. En D/A se realiza el proceso inverso.

El número de posibles códigos es finito: $2^{n^\circ \text{ bits}}$, y condiciona la resolución de la tarjeta.

La medida de la resolución es el bit menos significativo (*LSB*)

$$LSB = \frac{FS}{2^{n^\circ \text{ bits}}}$$

Donde FS es el fondo de escala, o el rango de variación de la señal analógica.

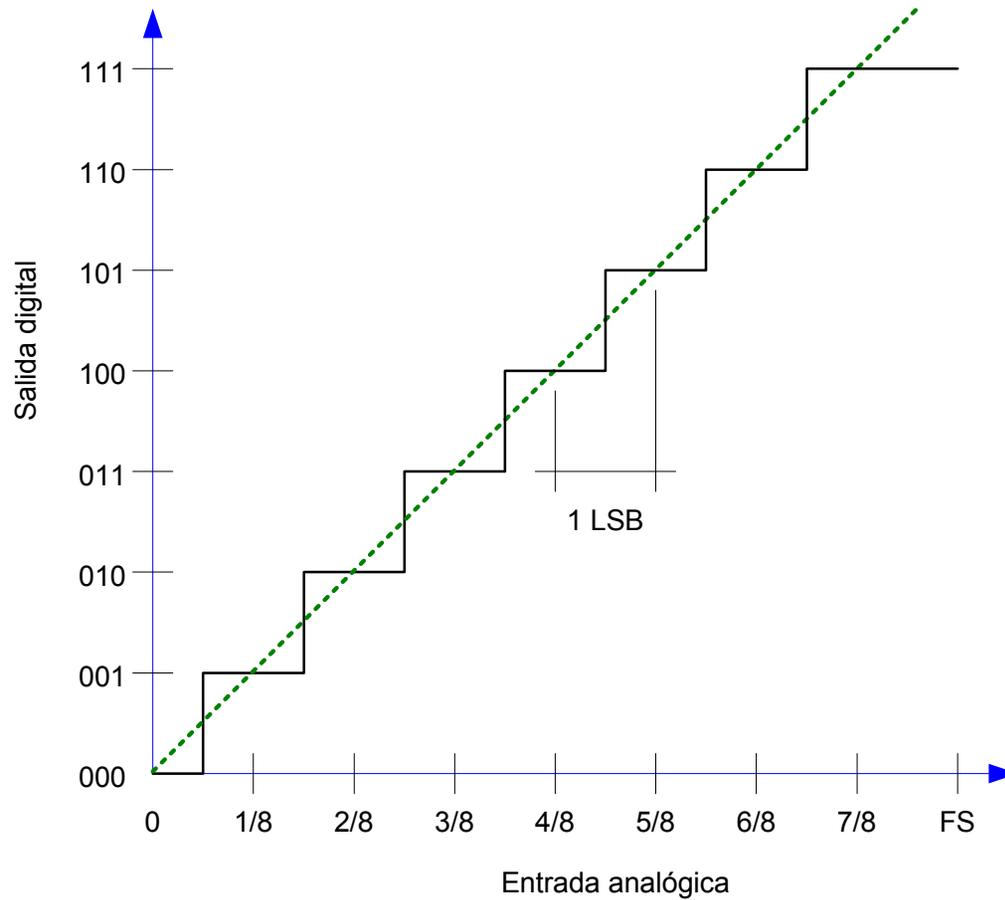
El error cometido dependerá del método de codificación:

- Redondeo: $\pm \frac{1}{2} LSB$
- Truncado: LSB



Ejemplo de cuantificación en A/D.

Para un convertidor de 3 bits





Reconstrucción.

Una vez generada la secuencia de control $\{u_k\}$, es necesario obtener una señal de control continua $u(t)$ para aplicar a la planta (que es continua). A este proceso se le llama **reconstrucción**.

$$\{u_k\} \rightarrow u(t)$$

El proceso de reconstrucción, al igual que el de muestreo, acarrea efectos indeseados ya que:

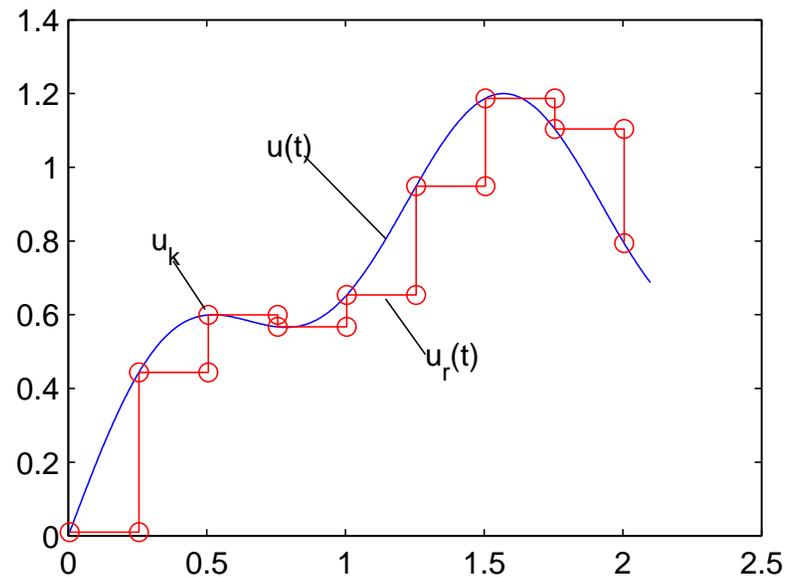
- Introduce un error al reconstruir señal en instantes de tiempo intermedios, para los que no hay información.
- Introduce un retardo al reconstruir el periodo siguiente a partir de la muestra actual (diseño por emulación).
- Introduce armónicos de alta frecuencia en el lazo de control.

Reconstrucción. Bloqueador de orden 0.

Existen varios procedimientos. El más sencillo y habitual es el *bloqueador de orden cero* (*zero order hold*):

$$u_r(t) = \sum_0^{\infty} u(kT_m) [\mathbf{1}(t - kT_m) - \mathbf{1}(t - (k + 1)T_m)]$$

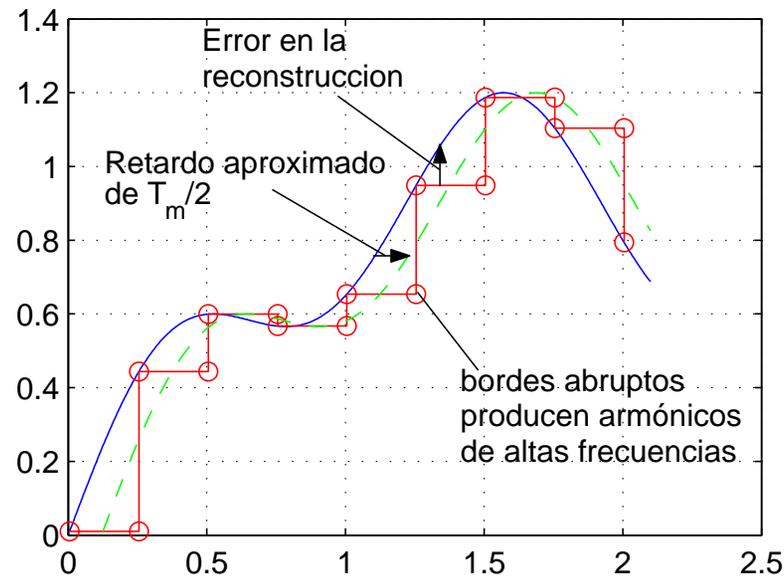
donde $\mathbf{1}(t - a)$ denota al escalón unitario iniciado en el instante $t = a$



Reconstrucción. Bloqueador de orden 0. Problemas prácticos.

El bloqueador de orden cero tiene dos problemas importantes

- Error en la reconstrucción al asumir que la señal no varía a lo largo del periodo.
- Retardo puro aproximado de $T_m/2$. Esto es debido a que se reconstruye la señal del periodo siguiente a partir de la muestra en el instante actual.
- Armónicos de altas frecuencias. Los escalones que conforman la señal reconstruida tienen un contenido en altas frecuencias (son saltos abruptos) que se introducen en el lazo de control.



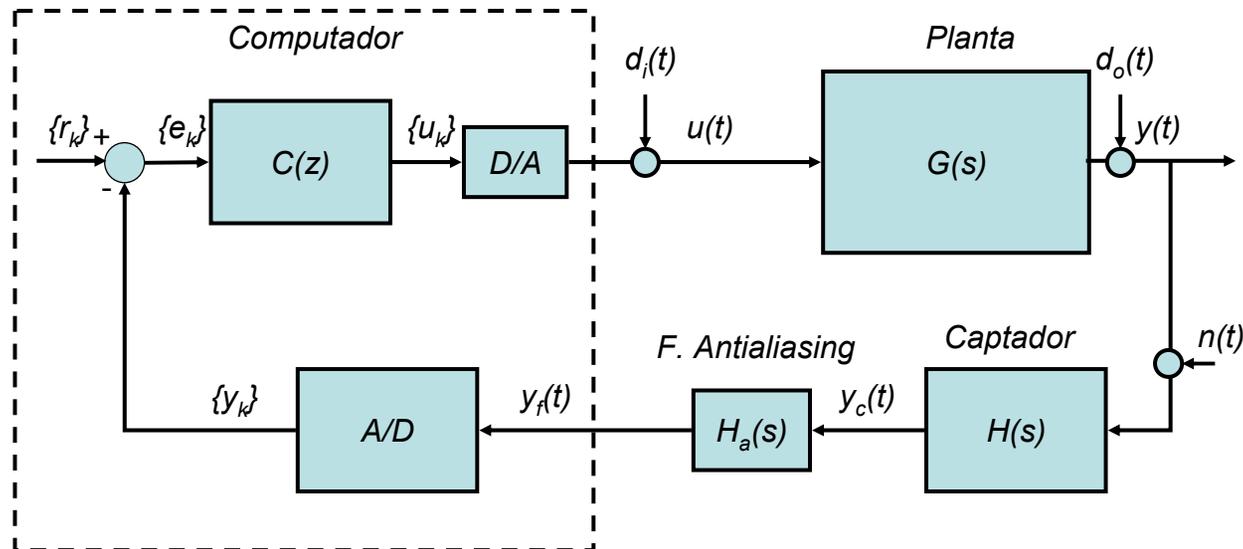


Elección del periodo de muestreo.

- La elección del período de muestreo puede ser crítica a la hora de controlar un sistema
- Un período de muestreo grande hará que el controlador reaccione con lentitud tanto a consigna como a perturbaciones, lo que inestabiliza el sistema: aumenta la sobreoscilación y disminuye el amortiguamiento.
- Un período de muestreo pequeño provocará una pérdida de tiempo al obligar a calcular la misma acción de control infinitas veces y exigirá mayor precisión en los cálculos.
- Un aspecto que puede condicionar la elección es la existencia o no de filtro antialiasing.

Elección del periodo de muestreo. Filtro antialiasing.

- En el sistema de control el aliasing puede aparecer con los ruidos de alta frecuencia ($f \geq f_{sh}$) que llegan al convertidor A/D desde $d_i(t)$, $d_o(t)$, $n(t)$.
- Hay que prestar atención especial a $n(t)$ (ruido del sensor) pues la función de transferencia hasta A/D, ($S(j\omega)$ si el ruido entra después del sensor, o $S(j\omega)H(j\omega)$, si entra antes del sensor) deja pasar ruido de alta frecuencia.
- Al ser convertidos en ruidos de baja frecuencia por el muestreo, pueden afectar a zonas de elevada sensibilidad o incluso al permanente, deteriorando el control.
- La solución es introducir un filtro analógico, entre captador y el convertidor A/D que elimine los componentes del ruido en la banda $f > f_{sh}$.





Elección del periodo de muestreo. Filtro antialiasing.

- Si se conoce el rango de frecuencias del ruido se puede diseñar y colocar el filtro de modo que la atenuación sea suficientemente grande para toda $f > f_{sh}$.
- Para no perjudicar el MF, el filtro deberá estar al menos 1 década por encima de la frecuencia de cruce de ganancia

$$\omega_a \geq 10 \times \omega_{cg}$$

- Si no es posible, habrá que tener en cuenta la dinámica del filtro en el diseño del compensador.
- El número de polos n del filtro define la selectividad del filtro. La atenuación a partir de la frecuencia de corte ω_a) se produce a un ritmo $n \times 20$ dB/decada.
- Cuantos más polos se pongan, mejor rechazo de las frecuencias de aliasing, pero más coste del filtro y más caída de fase (más riesgo de afectar al margen de fase del sistema).
- Existen diversos tipos de filtros en función de sus características (Butterworth, Chebychev, elípticos, etc.)

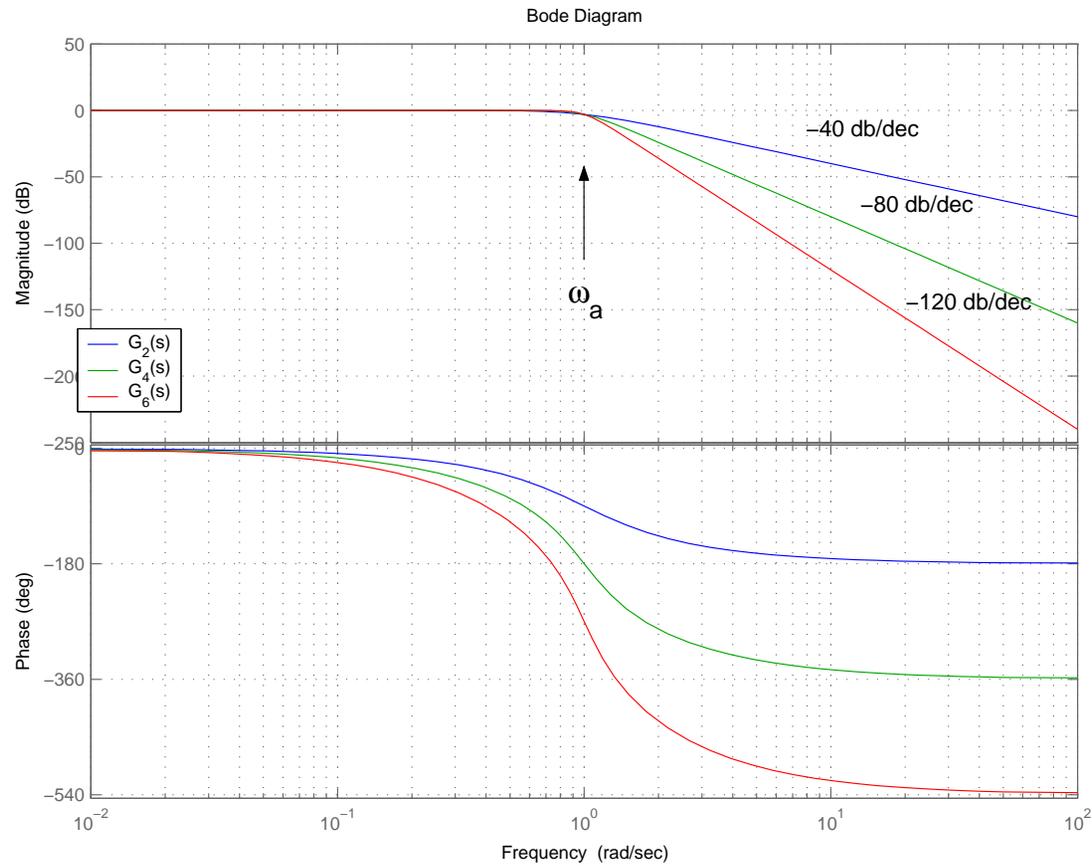
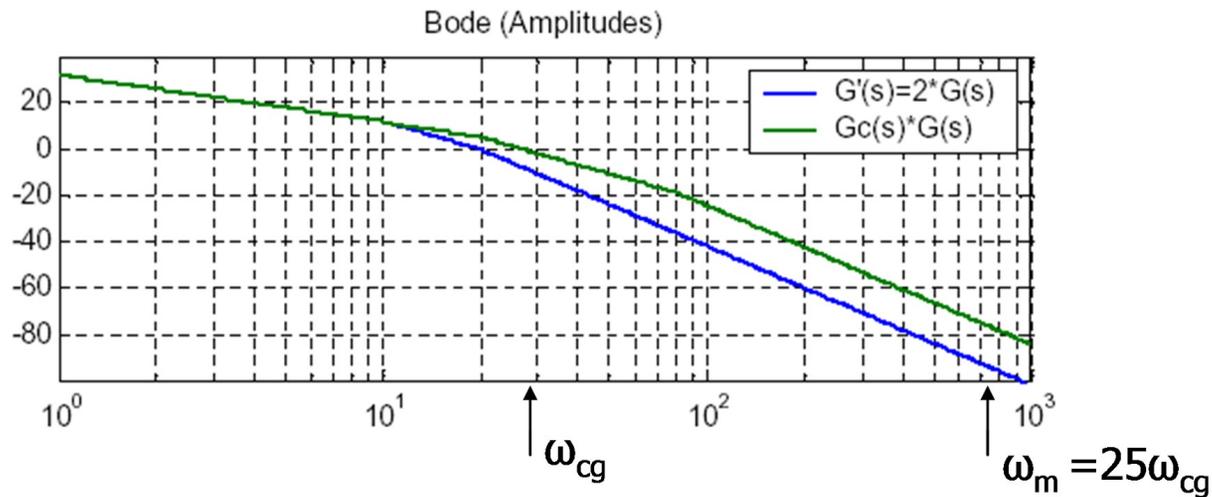


Figura 1: Ejemplo: tres filtros de Butterworth de órdenes $n = 2, 4, 6$ con frecuencia de corte $\omega_a = 1$ rad/s

Elección del periodo de muestreo. Sin filtro antialiasing.

El criterio más fiable está basado en la respuesta frecuencial

Se suele elegir una frecuencia de muestreo entre 20 y 40 veces el ancho de banda del sistema (ω_{cg} , u ω_n son buenas estimaciones).



Presupone controlador ya diseñado, o al menos su ganancia estática.



Elección del periodo de muestreo. Sin filtro antialiasing

También se puede estimar a partir de la respuesta temporal:

- Del sistema en cadena abierta.
- Del sistema realimentado (obligado si es inestable).

En función de que su respuesta ante escalón sea:

- Sobreamortiguada:

$$8 \leq \frac{t_s}{T_m} \leq 15$$

- Subamortiguada:

$$5 \leq \frac{t_p}{T_m} \leq 8$$



Elección del periodo de muestreo. Con filtro antialiasing.

Si se utiliza filtro antialiasing:

- El ancho de banda del sistema realimentado es ω_{cg}
- Para que la fase del filtro antialiasing no afecte al margen, su frecuencia de corte ω_a deberá estar aproximadamente 1 década por encima de la frecuencia de cruce de ganancia del sistema ω_{cg}

$$\omega_a = 10 \times \omega_{cg}$$

- Suponiendo que el filtro antialiasing asegura una caída suficiente de las frecuencias 1 década después de ω_a , la frecuencia de Shannon habría que situarla en ese punto

$$\omega_{sh} = 10 \times \omega_a$$

- Por definición $\omega_m = 2 \times \omega_a$, por tanto

$$\omega_m \approx 200 \times \omega_{cg}$$



(Fin de la presentación)