Análisis Dinámico de Sistemas

Ignacio Díaz Blanco

Resumen de Análisis Dinámico de Sistemas

Área de Ingeniería de Sistemas y Automática

Universidad de Oviedo

Sistemas Dinámicos

- Concepto de Sistema: Entidad que manipula una o más señales para llevara a cabo una función, produciendo de ese modo nuevas señales
- Los sistemas pueden estar interconectados entre sí formando un nuevo sistema más complejo.

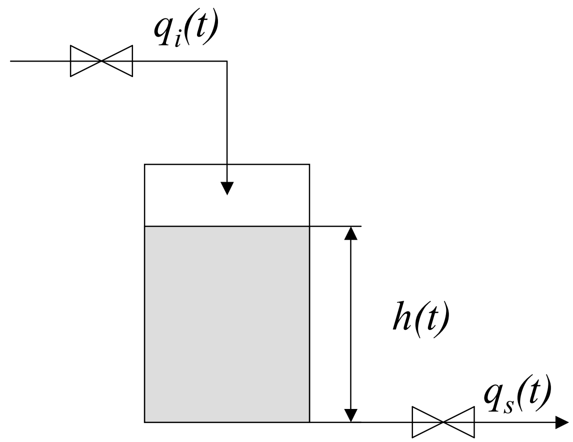
Descripción Analítica de sistemas

- De una forma muy general, un sistema SISO puede modelarse según una Ecuación Diferencial No lineal (EDNL)

$$f(y, y', y'', \cdots, y^{n)}, u, u', \cdots, u^{m)}) = 0$$

- Gráficamente

- Ejemplo: Depósito



- La dinámica del sistema está descrita por una EDNL

$$C\frac{dh(t)}{dt} = q_e(t) - K\sqrt{h(t)}$$

- La ED anterior puede escribirse en forma implícita:

$$f(\dot{h}, h, q_e) = 0$$

$$C\frac{dh(t)}{dt} - q_e(t) + K\sqrt{h(t)} = 0$$

Linealización de EDNL

Funciones de una variable

- Una función $f(x)$ puede aproximarse mediante el desarrollo de Taylor

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_0 (\Delta x)^2 + \cdots$$

tomando términos de primer orden

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_0 \Delta x + \epsilon$$

Linealización de EDNL

Funciones de varias variables

- La aproximación de Taylor de primer orden de una función de varias variables $f(x_1, x_2, \cdots)$ queda

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_0 \Delta x_1 + \left.\frac{\partial f}{\partial x_2}\right|_0 \Delta x_2 + \cdots + \epsilon$$

donde

$$\Delta x_i \quad = \quad x_i - x_{i0}$$

siendo $\mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \cdots, x_{n0})$ es el punto en torno al cual es válida la aproximación

Linealización de EDNL

Paso1: Determinación del punto de trabajo

- El *punto de trabajo* es el estado de funcionamiento (definido por las variables del sistema) en torno al cual vamos a trabajar.
- Típicamente, el punto de trabajo es un punto de equilibrio $\rightarrow$ las derivadas temporales son cero

$$\frac{d}{dt} \equiv 0$$

- En la medida en que nos alejemos de $\mathbf{x}_0$ la aproximación será menos válida
- Cuánto se puede uno alejar: experiencia o simulación
- El punto de trabajo debe elegirse lo más próximo posible a los puntos de funcionamiento previsibles en el sistema.

Linealización de EDNL

Paso1: Determinación del punto de trabajo

Para hallar el punto de trabajo:

1) Se igualan las derivadas temporales a cero.

2) Se resuelve el sistema de ecuaciones resultante

Ejemplo

$$C\frac{dh(t)}{dt} - q_e(t) + K\sqrt{h(t)} = 0$$

$$dh(t)/dt \quad \equiv \quad 0$$

de donde,

$$\begin{aligned} q_{e0} &= K\sqrt{h_0} \\ h_0 &= \frac{q_{e0}^2}{K^2} \end{aligned}$$

Linealización de EDNL

Paso2: Aproximación de Taylor

Ejemplo:

$$C\frac{dh(t)}{dt} - q_e(t) + K\sqrt{h(t)} = 0$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \dot{h}}\right|_0 = C, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial h}\right|_0 = K\frac{1}{2\sqrt{h_0}}, \qquad \left.\frac{\partial f}{\partial q_e}\right|_0 = -1$$

de donde,

$$\boxed{C\frac{d\Delta h(t)}{dt} - \Delta q_e(t) + K\frac{1}{2\sqrt{h_0}}\Delta h(t) = 0}$$

La Transformada de Laplace

- La linealización nos lleva a una EDL de coeficientes constantes

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

- La transformada de Laplace convierte EDL-CC en un problema polinómico

- Definición:

$$\begin{aligned} f(t) \quad &\rightarrow \quad F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \\ F(s) \quad &\rightarrow \quad f(t) = \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \end{aligned}$$

Transformaciones Típicas

- Escalón

$$u(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \rightarrow U(s) = \int_0^\infty 1 \cdot e^{-st} = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^\infty = \frac{1}{s}$$

- Rampa

$$r(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases} \rightarrow R(s) = \frac{1}{s^2}$$

- Exponencial

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t}, t \geq 0 \\ 0, \quad\quad t < 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow F(s) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} \cdot e^{-st} dt = \int_0^\infty e^{-(\sigma + s)t} dt = \left[-\frac{1}{s+\sigma} e^{-(s+\sigma)t} \right]_0^\infty = \frac{1}{s+\sigma}$$

Transformaciones Típicas

- Seno

$$f(t) = \sin(\omega t) \rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Propiedades Típicas

- Linealidad

$$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha\mathcal{L}(f(t)) + \beta\mathcal{L}(g(t))$$

- Desplazamiento en s

$$F(s+\alpha) = \mathcal{L}(e^{-\alpha t} f(t))$$

- Desplazamiento en el tiempo

$$\mathcal{L}[f(t-T)u(t-T)] = e^{-sT}F(s), \qquad T > 0, \quad f(t) = 0, \forall t < 0$$

Propiedades Típicas

- Diferenciación en t

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\dot{f}(t)) &= sF(s) - f(0^+) \\
&\cdots \\
\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) &= s^n F(s) - \sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(0^+) s^{n-k}
\end{aligned}
$$

- Teorema del valor inicial

$$f(0^+) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

- Teorema del valor final

$$f(\infty) = \lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

Teorema de Convolución

- Convolución entre dos funciones

$$f * g = c(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

- Teorema de Convolución

$$C(s) = \mathcal{L}[f * g] = F(s) \cdot G(s)$$

Concepto de Función de Transferencia

- La linealización nos da EDL-CC:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 u + b_1 \frac{du}{dt} + \cdots + b_m \frac{d^m u}{dt^m}$$

- Suponiendo condiciones iniciales nulas y haciendo $\mathcal{L}$[expresión]

$$a_n s^n Y(s) + a_{n-1} s^{n-1} Y(s) + \cdots a_0 Y(s) =$$
$$= b_0 U(s) + b_1 s U(s) + \cdots b_m s^m U(s)$$

reagrupando queda,

$$\left(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots a_0\right) Y(s) = \left(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0\right) U(s)$$

Finalmente,

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0} U(s)$$

Cálculo de Antitransformadas

- Al final, tenemos una expresión racional

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} \cdot U(s) = \text{Expresión Racional} = \frac{\prod(s - z_i)}{\prod(s - p_i)}$$

- $Y(s)$ se puede descomponer en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{B_k}{(s - p_k)^r} + \cdots \qquad p_i \in \mathbb{C}$$

- Aplicando linealidad, puede hallarse una a una

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_1}{s - p_1}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{A_2}{s - p_2}\right] + \cdots$$

Cálculo de Antitransformadas

- La descomposición en fracciones simples se puede realizar por cualquier procedimiento (típicamente los métodos de cálculo de primitivas)

- Cálculo de las A_i. Formula de Heaviside válida para raíces simples $p_i \in \mathbb{C}$,

$$A_i = (s - p_i)F(s)|_{s=p_i}$$

- Con ello,

$$\frac{A_i}{s - p_i} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow A_i e^{p_i t}$$

- Finalmente, aplicando linealidad de $\mathcal{L}$

$$f(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \cdots$$

- Para raíces de multiplicidad $k \rightarrow$ (cfr. [Puente91])

Modos Transitorios

- Resultados importantes:
  1) La respuesta $f(t)$ de un sistema es suma de funciones elementales (*modos transitorios*) asociadas a los polos de $F(s)$.
  2) La posición de los polos en el plano complejo marca la dinámica de los modos transitorios
- Es posible realizar un "mapa" del plano complejo o plano $\mathcal{S}$

Modos Transitorios

- En general
  - Si p_i es real da lugar a una *exponencial decreciente*.
  - Si p_i tiene parte imaginaria dará lugar a *modos oscilatorios*
  - Si p_i tiene parte real positiva, dará lugar a *modo inestable*

Álgebra de Bloques

- El concepto de función de transferencia permite expresar la dinámica de sistemas mediante diagramas de bloques interconectados
- Existen diversas operaciones
  - Conexión en serie
  - Conexión en paralelo
  - Conexión en bucle cerrado
  - Operaciones de desplazamiento de bloques

Respuesta Impulsional

- Transformada de Laplace del impulso de Dirac

$$\delta(t) \rightarrow 1$$

- Si sometemos a un sistema $G(s)$ a un impulso

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s) \cdot 1] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

- $g(t)$ es la contrapartida temporal de $G(s)$
- La respuesta impulsional $g(t)$ contiene toda la información sobre el sistema.
- $g(t)$ permite obtener la respuesta ante una señal cualquiera, por convolución

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} = g(t) * u(t) = \int_0^t g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

Respuesta al Escalón

- Escalón

$$u(t) \to U(s) = \frac{1}{s}$$

- La respuesta al escalón es

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)\frac{1}{s}] = \int_0^t g(t)dt$$

es decir, la respuesta al escalón es la integral de la respuesta impulsional

- La respuesta al escalón también contiene toda la información sobre el sistema, pero es más práctica.

Respuesta al Escalón: Estabilidad

- Estabilidad: Un sistema es estable si exhibe una respuesta acotada para toda entrada acotada. Matemáticamente, la condición es

$$\int_0^\infty |g(\tau)| d\tau < \infty$$

- La respuesta al escalón debe tender a un valor fijo y finito

$$\exists \lim_{t \to \infty} y(t) = C < \infty$$

Respuesta al Escalón: Ganancia

- Ganancia estática: valor en el permanente de $y(t)$ ante una entrada $u(t)$ escalón unitario.

- En Laplace

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} sY(s) = \lim_{s \to 0} G(s) = G(0) \quad \leftarrow \text{(si existe el límite)}$$

- La ganancia estática, puede obtenerse de la respuesta impulsional:

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)d\tau \rightarrow y(\infty) = \int_0^\infty g(\tau)d\tau$$

era de esperar, dado que la $g(t)$ tiene toda la información sobre el sistema

- La ganancia estática *tiene dimensiones*

$$\frac{\text{dim. de salida}}{\text{dim. de entrada}}$$

Sistemas de primer orden

- Orden de un sistema $G(s) = N(s)/D(s)$: Es el orden del denominador $D(s)$
- Sistema de primer orden

$$T\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Ku(t)$$

- Función de transferencia

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{1+Ts}$$

$$\begin{aligned} K &= \text{Ganancia Estática} \\ T &= \text{Constante de tiempo} \end{aligned}$$

Sistemas de primer orden

- Respuesta impulsional

$$g(t) = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

- Respuesta al escalón

$$y(t) = K(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

- En $t = T$ segs.

$$y(T) = K(1 - e^{-1}) = 0.632K$$

El sistema tarda T segundos en alcanzar el 63.2% del valor en régimen permanente

Sistemas de primer orden

- Tiempo de establecimiento: tiempo que tarda en alcanzar el 95% del valor en permanente

$$0.95K = K(1 - e^{-t_s/T}) \quad \rightarrow \quad t_s \approx 3T$$

Sistemas de segundo orden

- Ecuación Diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + a_1\frac{dy(t)}{dt} + a_2y(t) = bu(t)$$

- Laplace:

$$Y(s)(s^2 + a_1s + a_2) = bU(s) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{b}{s^2 + a_1s + a_2}$$

- Ganancia Estática:

$$\lim_{s\rightarrow 0} sG(s)\frac{1}{s} = G(0) = \frac{b}{a_2}$$

Sistemas de segundo orden

- Forma normalizada

$$G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n \cdot s + \omega_n^2}$$

$$\begin{aligned}
\omega_n &= \text{Frecuencia natural no amortiguada} \\
\xi &= \text{coeficiente de amortiguamiento} \\
K &= \text{Ganancia Estática} \\
\sigma = \xi\omega_n &= \text{Factor de decrecimiento} \\
\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\xi^2} &= \text{Frecuencia amortiguada}
\end{aligned}$$

Sistemas de segundo orden

- Ecuación característica:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \tag{1}$$

raíces

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\xi\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\xi^2 - 1} && (2)\\ &= -\sigma \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} && (3)\end{aligned}$$

- Sistema oscilatorio puro: $\xi = 0$ polos imaginarios puros

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n \tag{4}$$

comportamiento oscilatorio puro.

- Sistema subamortiguado: $0 < \xi < 1$ polos complejos conjugados.

$$s_{1,2} = -\sigma \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} \tag{5}$$

senoidal amortiguada de frecuencia ω_d y ritmo de decrecimiento dado por σ

- Amortiguamiento crítico: $\xi = 1$ polo real doble.

$$s_{1,2} = -\sigma(\text{doble}) \tag{6}$$

- Sistema sobreamortiguado: $\xi > 1$ dos polos reales

$$s_{1,2} = -\sigma \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1} \tag{7}$$

Identificación de sistemas de segundo orden

- Expresiones básicas:

$$
\begin{aligned}
Mp &= \frac{y_{max} - y_{\infty}}{y_{\infty}} = e^{-\pi \mathsf{cot}(\theta)} && \leftarrow \text{sobreoscilación} \\
t_p &= \frac{\pi}{\omega_d} && \leftarrow \text{tiempo de pico} \\
t_s &= \frac{\pi}{\sigma} && \leftarrow \text{tiempo de establecimiento} \\
\xi &= \cos(\theta) && \leftarrow \text{coeficiente de amortiguamiento}
\end{aligned}
$$

Sistemas de orden superior

- Pueden aproximarse mediante sistemas de orden 1 ó 2 equivalentes
- Diferencias: cuantificables considerando un polo o cero adicional a un sistema dado...

Efecto de polos y ceros adicionales

- Efecto de un cero adicional:

$$
\begin{aligned}
G_c(s) &= \frac{s+c}{c} \\
y(t) &= \frac{1}{c}\frac{dr(t)}{dt} + r(t)
\end{aligned}
$$

  - Adelanta la respuesta $t_p \downarrow$
  - La hace más rápida y más oscilatoria $M_p \uparrow$

- Efecto de un polo adicional:

$$G_p(s) = \frac{p}{s+p}$$

  - Atrasa la respuesta $t_p \uparrow$
  - La hace mas lenta y menos oscilatoria $M_p \downarrow$

Modos dominantes

$$y(s) = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s - p_1} + \frac{A_2}{s - p_2} + \cdots$$

- Los modos más lentos son los dominantes (eslabón débil)
- Corresponden a los polos o ceros situados más a la derecha
- Los polos dominantes:
  - son los más lentos
  - tardan más en desvanecerse; su efecto perdura cuando los demás ya se han hecho casi cero
  - su "peso" A_i es mayor
- El efecto de los ceros dominantes también es más intenso cuanto más cerca estén del origen
- Los pares polo-cero ó cero-polo se comportan como "ceros

débiles" ó "polos débiles"

Criterio de Routh

- Método numérico (cfr. [Puente91]) que permite determinar el número de polos inestables en un polinomio dado.
- Se genera una tabla
- Los cambios de signo en la primera columna nos dan el número de polos inestables.
- Usado en función de parámetros permite también
  - Determinar rangos de estabilidad para un parámetro K
  - Determinar estabilidad relativa en función de σ

Respuesta en frecuencia

•