Respuesta en frecuencia

Basado en *“Feedback Control of Dynamic Systems”,* Franklin, G.F. et al.
4ª edición, Prentice-Hall, 2002.

Sistemas Automáticos, 2003-2004

Índice

1. **Introducción**
2. Respuesta en frecuencia
3. Polos y ceros. Diagramas de Bode
4. Estabilidad. Criterio de estabilidad de Nyquist
5. Márgenes de estabilidad (Ganancia – Fase)

Introducción

- Con respuesta en frecuencia se quiere hacer referencia a la respuesta en estado estacionario de un sistema ante una entrada senoidal.
- Se variará la frecuencia y se estudiará la respuesta.
- El análisis y diseño de sistemas de control basados en la respuesta en frecuencia es probablemente el más empleado en la industria.
- Se puede realizar directamente a partir de datos experimentales sin deducir un modelo.
- Los métodos de respuesta en frecuencia fueron desarrollados entre 1930 y 1940 por Bode, Nyquist y Nichols entre otros.

Índice

1. Introducción
2. **Respuesta en frecuencia**
3. Polos y ceros. Diagramas de Bode
4. Estabilidad. Criterio de estabilidad de Nyquist
5. Márgenes de estabilidad (Ganancia – Fase)

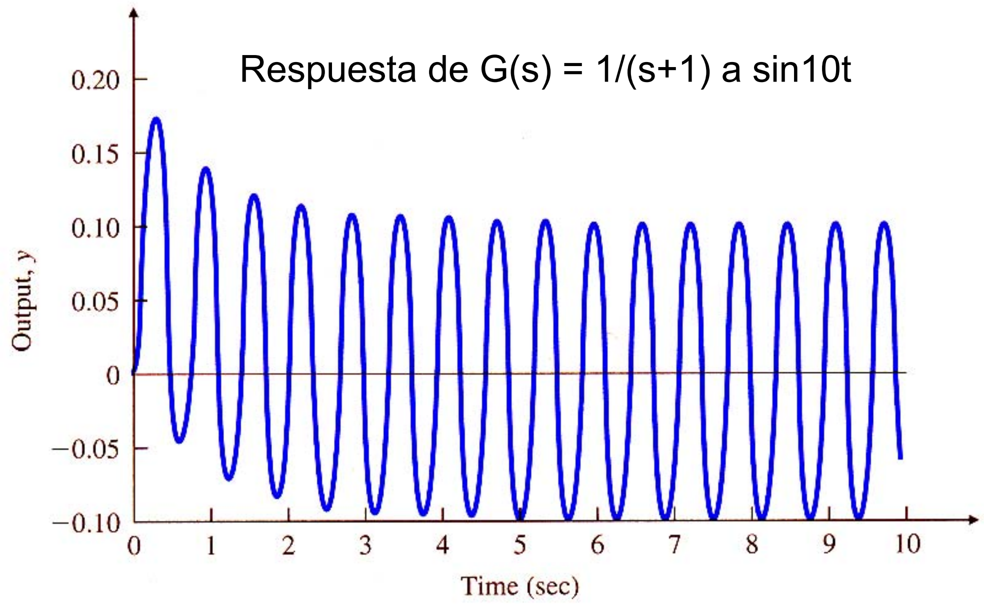
Respuesta en frecuencia

Respuesta en régimen permanente
a entrada senoidal

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

$$u(t) = U_0 \sin \omega t$$

$$Y(s) = G(s)\frac{U_0\omega}{s^2+\omega^2}$$



$$y(t) = U_0 M \sin(\omega t + \phi)$$

$$M = |G(j\omega)| = |G(s)|_{s=j\omega} = \sqrt{\{\mathrm{Re}[G(j\omega)]\}^2 + \{\mathrm{Im}[G(j\omega)]\}^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega)]} = \angle G(j\omega)$$

Respuesta en frecuencia

Resumen

- Una entrada senoidal, en régimen permanente produce una salida senoidal
- La frecuencia de ambas <u>es la misma</u>
- La relación de amplitudes y el desfase entre entrada y salida dependen de la frecuencia y no de la amplitud de la entrada
- Se puede expresar también como:

$$G(j\omega) = Me^{j\Phi} = M\angle\Phi$$

El análisis de G(s) cuando s toma valores a lo largo del eje imaginario (*s = jω)*, resultará muy útil para determinar la estabilidad del sistema en cadena cerrada

Ejemplo: corriente en un condensador

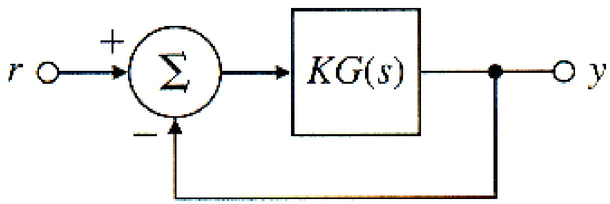
$$i = C\frac{dv}{dt}$$

$$G(s) = Cs$$

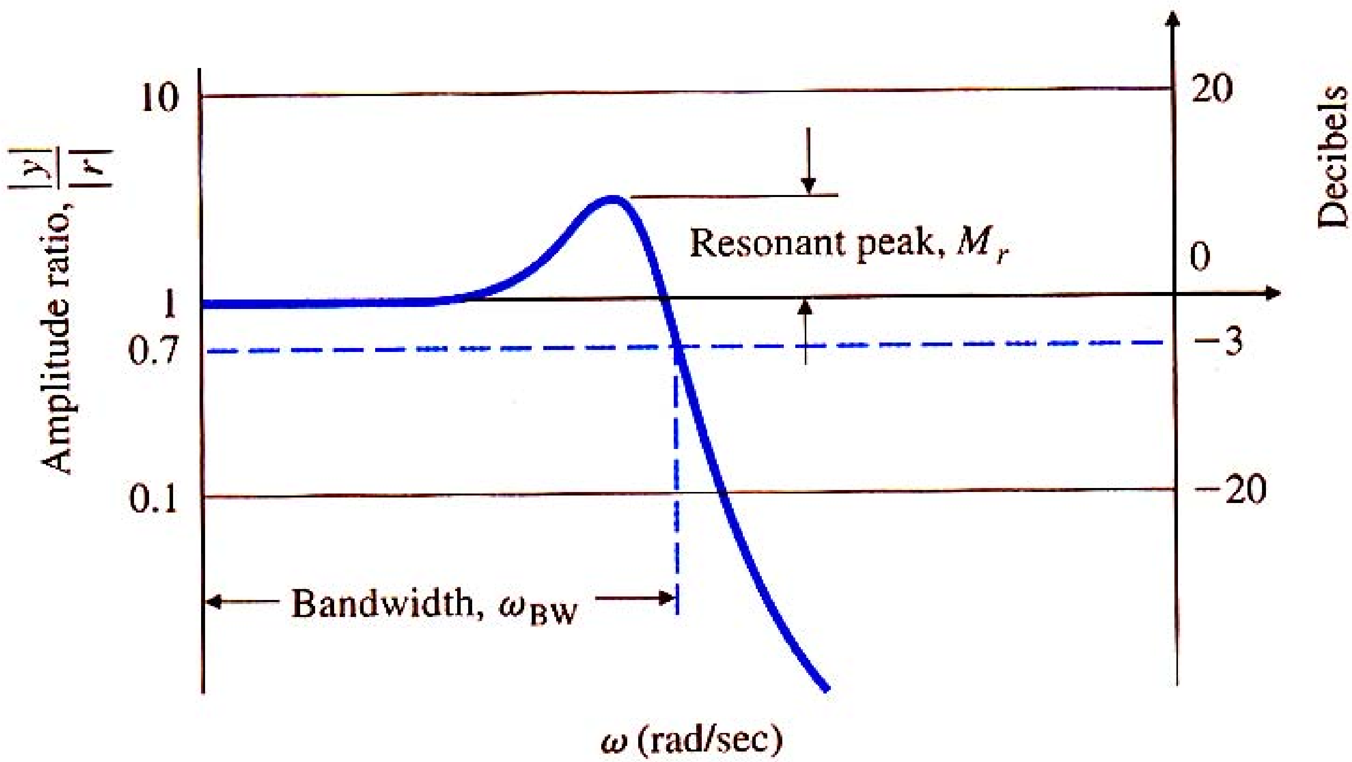
$$G(j\omega) = Cj\omega$$

$$M = C\omega \qquad \phi = 90^o$$

Ancho de banda y pico de resonancia



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = T(S) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)}$$



Ancho de banda y pico de resonancia

- **Ancho de banda**: Máxima frecuencia a la que la salida del sistema seguirá de forma satisfactoria una entrada senoidal.

  Por convención se toma la frecuencia a la que la salida se atenúa en un factor de 0.707 (la relación entre potencias se atenúa en un factor de 2), o lo que es lo mismo la frecuencia a la que la curva de magnitud corta a -3 dB (decibelios)

  Aproximadamente corresponde a la frecuencia natural del sistema realimentado

  El ancho de banda afecta a:

  - Capacidad de reproducir la entrada (ancho de banda grande implica respuesta rápida y viceversa)
  - Características de filtrado de ruido de alta frecuencia

- El valor máximo de la curva de magnitud corresponde al **pico de resonancia**

Diagrama de Bode

H.W. Bode en el Laboratorio Bell 1932~1942

$$G(j\omega)=\frac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{\vec{s}_3\vec{s}_4\vec{s}_5}=\frac{r_1e^{j\theta_1}r_2e^{j\theta_2}}{r_3e^{j\theta_3}r_4e^{j\theta_4}r_5e^{j\theta_5}}=(\frac{r_1r_2}{r_3r_4r_5})e^{j(\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4-\theta_5)}$$

$$\left|G(j\omega)\right|=\frac{r_1r_2}{r_3r_4r_5}$$

$$\log_{10}\left|G(j\omega)\right|=\log_{10}r_1+\log r_2-\log_{10}r_3-\log_{10}r_4-\log_{10}r_5$$

Escalas del diagrama de magnitudes:

Magnitud: logarítmica Frecuencia: logarítmica

Escalas del diagrama de fases:

Fase: lineal Frecuencia: logarítmica

Terminología

La magnitud se mide en decibelios (db). En comunicaciones :

$$\left|\mathrm{G}\right|_{dB} = 10\log_{10}\frac{P_2}{P_1} \quad \text{(relación entre las potencias de las señales)}$$

$$= 20\log_{10}\frac{V_2}{V_1} \quad \text{(la potencia es proporcional al cuadrado de la tensión)}$$

Las razones de frecuencias se suelen expresar en décadas u octavas

Una década es una banda de frecuencia de ω_1 a $10\omega_1$

Una octava es una banda de frecuencia de ω_1 a $2\omega_1$

Ventajas de los diagramas de Bode

- El diseño dinámico del compensador se puede basar enteramente en los diagramas de Bode
- Los diagramas de Bode se pueden determinar experimentalmente
- Los diagramas de Bode de sistemas en serie simplemente se suman
- El uso de escalas logarítmicas permite el uso de un rango de frecuencias mucho más amplio que con escalas lineales

Función de transferencia para Bode

La forma más conveniente para el lugar de las raíces es :

$$KG(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)}{(s-p_1)(s-p_2)}$$

Para el diagrama de Bode :

$$KG(j\omega) = K_0\frac{(j\omega\tau_1+1)(j\omega\tau_2+1)}{(j\omega\tau_a+1)(j\omega\tau_b+1)}$$

Pueden aparecer tres tipos de términos :

1. $K_0(j\omega)^n$

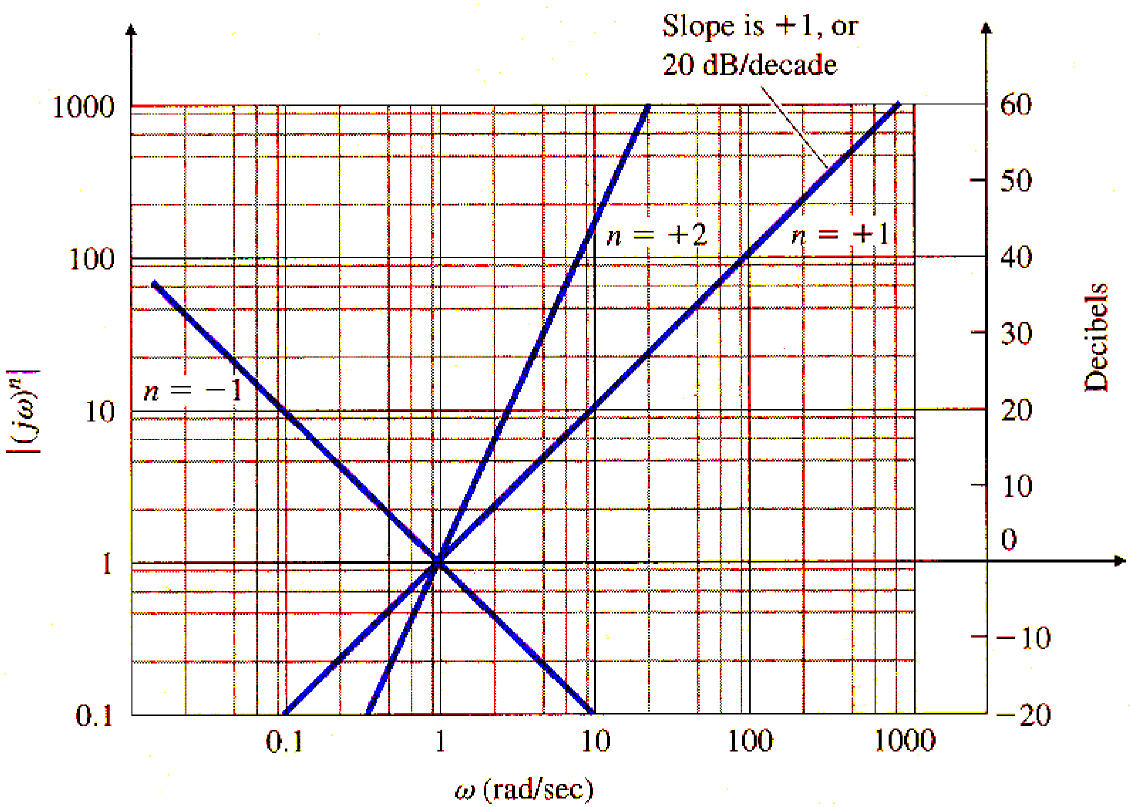
2. $(j\omega\tau+1)^{\pm 1}$

3. $\left[\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2+2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n}+1\right]^{\pm 1}$

Constante y polos y ceros en el origen

$$K_0(j\omega)^n$$

$$\log K_0\left|(j\omega)^n\right| = \log K_0 + n\log\left|j\omega\right| \qquad \phi = n \times 90^o$$



Magnitud de $(j\omega)^n$

Al añadir el término constante habrá que desplazar verticalmente la recta

Cero o polo simple

$j\omega\tau + 1$

$a)$ para $\omega\tau << 1,\ j\omega\tau + 1 \cong 1$

$b)$ para $\omega\tau >> 1,\ j\omega\tau + 1 \cong j\omega\tau$

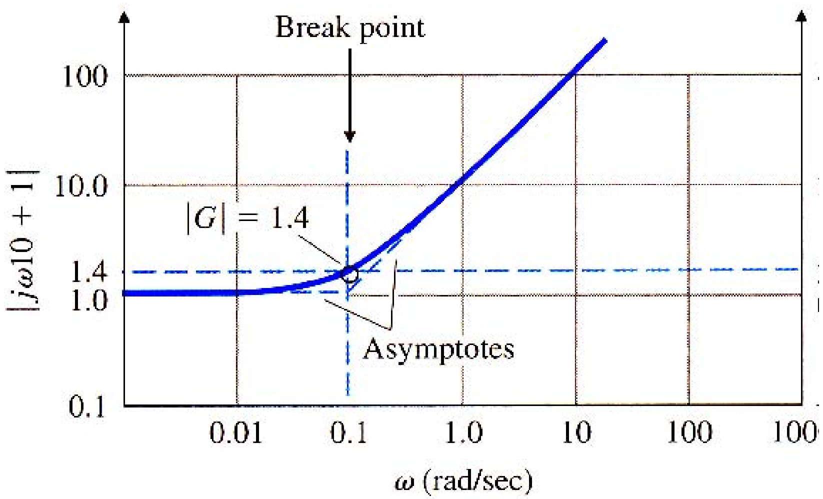
$\omega = \dfrac{1}{\tau}$: frecuencia de corte

fase

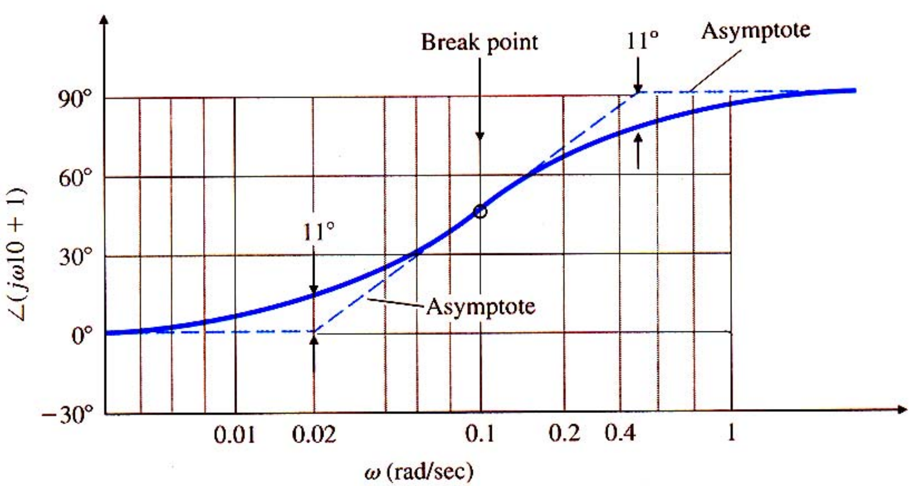
$a)$ para $\omega\tau << 1 \qquad \angle 1 = 0^o$

$b)$ para $\omega\tau >> 1 \qquad \angle j\omega\tau = 90^o$

$c)$ para $\omega\tau \cong 1 \qquad \angle(j\omega\tau + 1) = 45^o$



Magnitud para jωτ+1j; τ=0.1



Fase para jωτ+1j; τ=0.1

Cero o polo simple

- Las curvas para polos serán las mismas que para ceros pero con el signo cambiado.
- El error máximo que se da entre el Bode real y el asintótico es de 3 db en el punto o frecuencia de corte.
- En el asintótico de fases lo más frecuente es trazar la diagonal entre una década antes y una década después de la frecuencia de corte, aunque tb. se puede hacer entre $\omega_c/5$ y $5\omega_c$ (como en la gráfica anterior)

Polos o ceros conjugados

$$[(j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + 1]^{\pm 1}$$

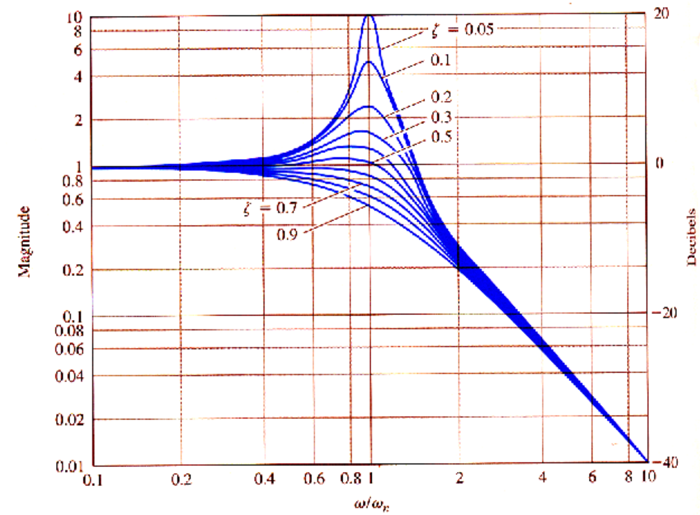
frecuencia de corte $\omega = \omega_n$

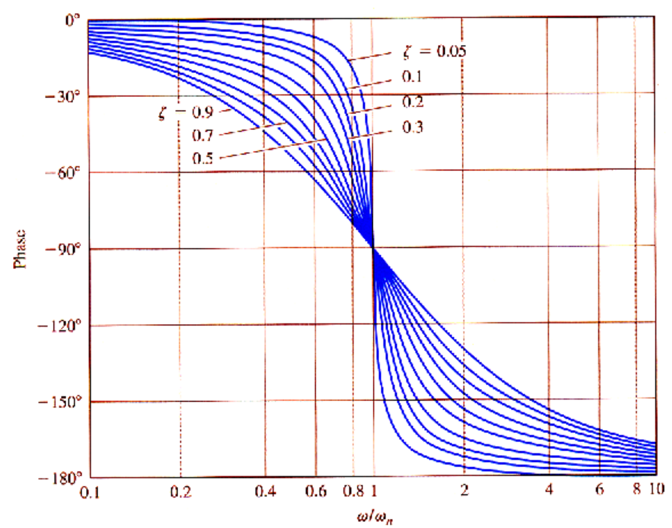
pendiente -2 o $+2$ $(\pm 40\ \text{dB})$

fase : $\pm 180^{\circ}$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{2\zeta} \qquad a \quad \omega = \omega_n$$

$$0 < \zeta < 1$$

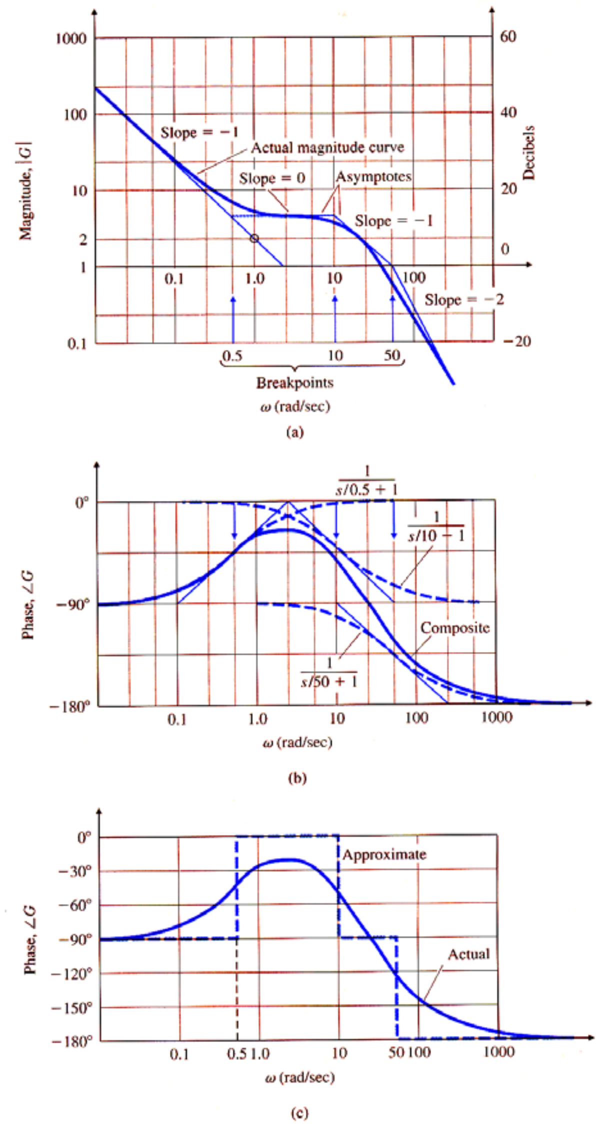




Ejemplo de trazado de Bode

$$KG(s) = \frac{2000(s+0.5)}{[s(s+10)(s+50)]}$$

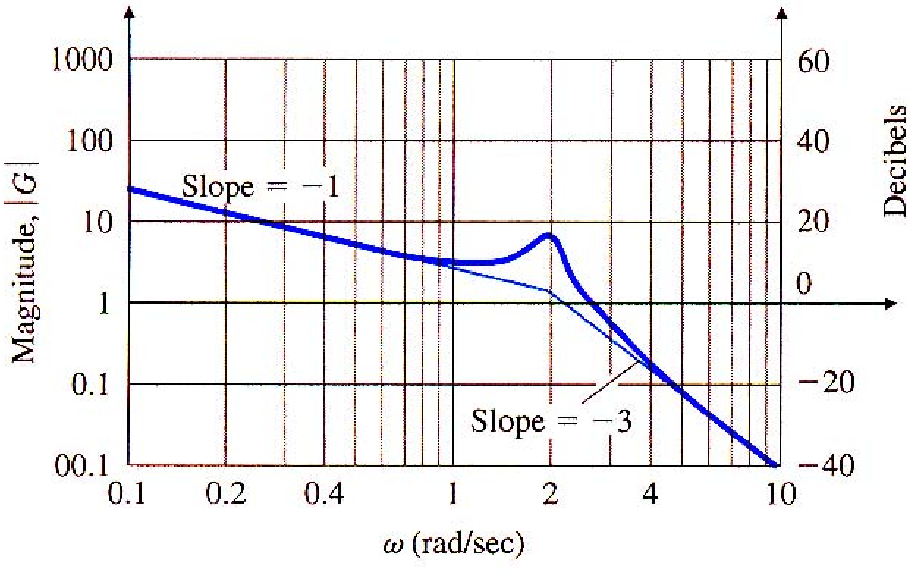
$$KG(j\omega) = \frac{2[(j\omega/0.5)+1]}{j\omega[(j\omega/10)+1][(j\omega/50)+1]}$$



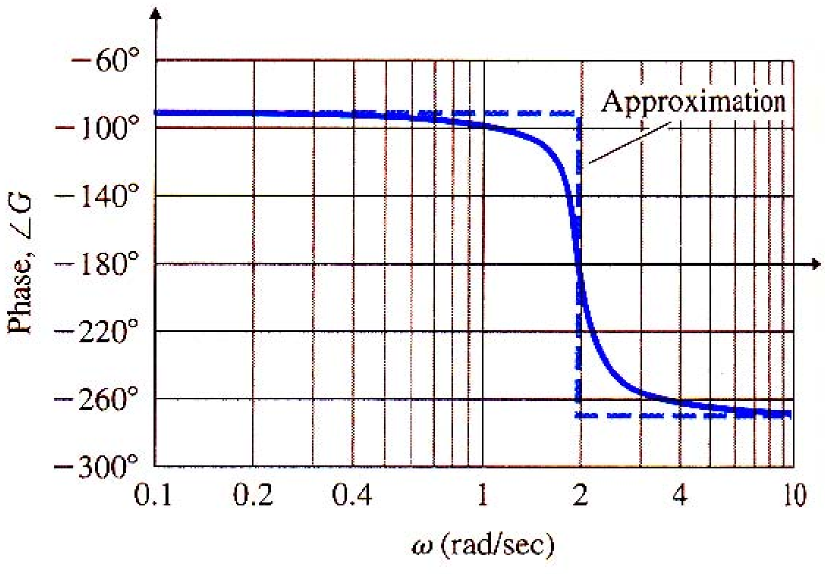
Bode con polos complejos conjugados

$$KG(s) = \frac{10}{s(s^2 + 0.4s + 4)}$$

$$KG(s) = \frac{10}{4} \frac{1}{s[(s^2/4) + [2(0.1)s/2] + 1]}$$



(a)



(b)

Índice

1. Introducción
2. Respuesta en frecuencia
3. Polos y ceros. Diagramas de Bode
4. **Estabilidad. Criterio de estabilidad de Nyquist**
5. **Márgenes de estabilidad (Ganancia – Fase)**

Para repaso de estos dos últimos puntos, ver Tema 6 de Análisis Dinámico de Sistemas:

http://isa.uniovi.es/docencia/adsii/tema6.pdf

Se puede también obtener un desarrollo más detallado de los tres primeros puntos en el Tema 5:

http://isa.uniovi.es/docencia/adsii/tema6.pdf