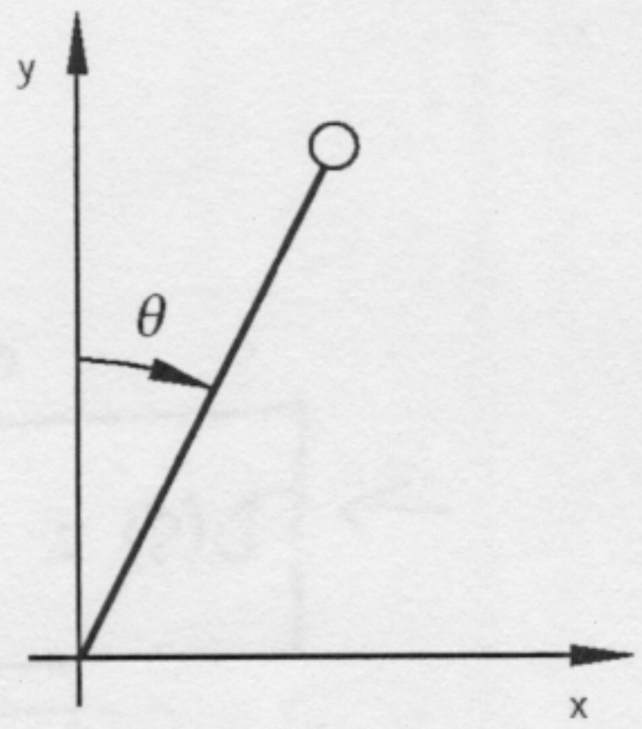
El control de un péndulo invertido es una interesante ilustración de la capacidad de la realimentación para estabilizar un sistema inestable. Suponiendo la siguiente ecuación del movimiento

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = mgl\sin(\theta) + mlu\cos(\theta)$$



donde *u* es la aceleración del pivote (en la dirección *x*), y los parámetros son:

$$J = ml^2,\ m = 1,\ g = 10,\ l = 10$$

Se pide:

1. Obtener un modelo lineal válido en torno a θ=0

$\boxed{\theta_0 = 0}$: Equilibrio $\frac{d}{dt} = 0 \rightarrow 0 = mgl\cdot \cancel{\operatorname{sen}\theta_0} + mlu_0\cdot\cancel{\cos(\theta_0)} \rightarrow \boxed{u_0 = 0}$

$ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta,u)$ $\quad \left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|_0 = mgl\cos\theta_0 - mlu_0\operatorname{sen}\theta_0, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 = ml\cos\theta_0$

(equilibrio)

$ml^2\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} = f(\theta_0,u_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial \theta}\right|_0 \Delta\theta + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_0 \Delta u \rightarrow ml^2\frac{d^2\Delta\theta}{dt^2} = mgl\cdot\Delta\theta + ml\,\Delta u$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} J\cdot s^2\Theta(s) = mgl\,\Theta(s) + ml\,U(s) \rightarrow \Theta(s) = \frac{ml}{ml^2s^2 - mgl}\cdot U(s) \Rightarrow \boxed{\Theta(s) = \frac{1/l}{s^2 - \frac{g}{l}} U(s)}$

2. Diseñar un regulador del tipo:

$$D(s) = K\cdot\frac{s+1}{s+p} \qquad \Theta(s) = \frac{0.1}{s^2-1}U(s)$$

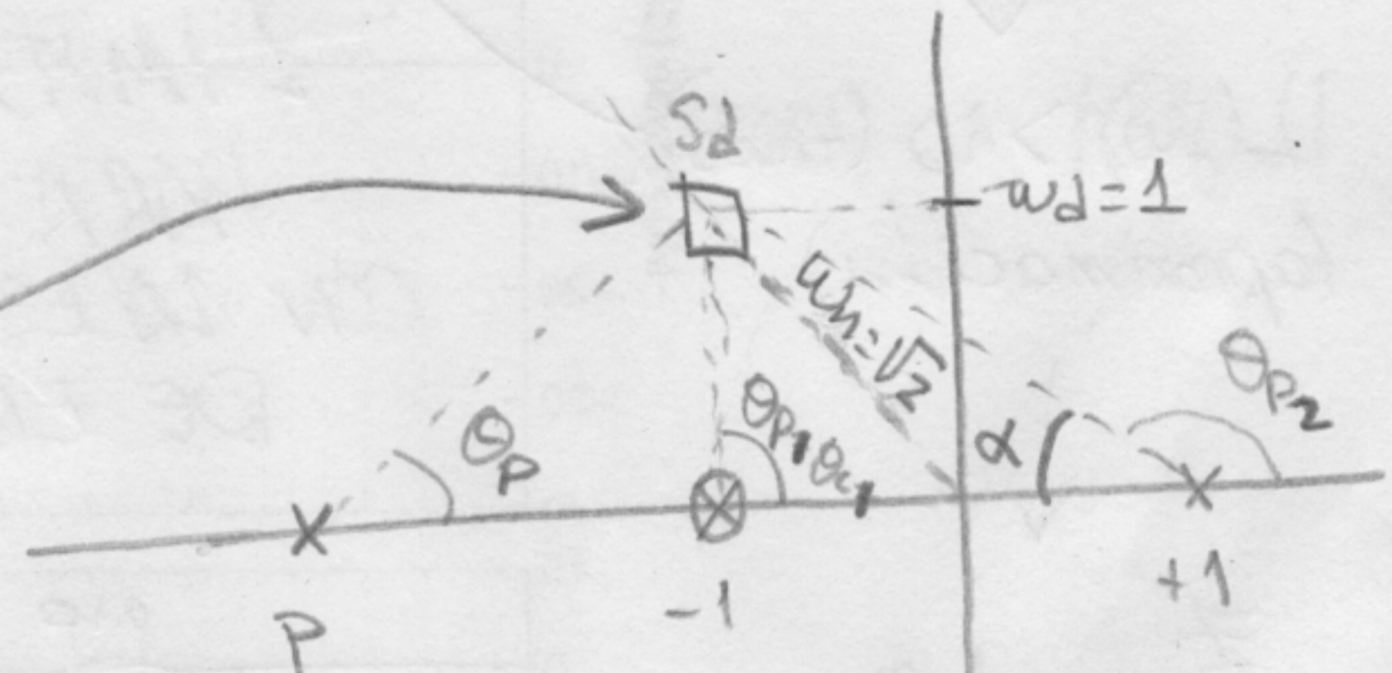
que consiga estabilizar el sistema con un tiempo de pico 3.14 segundos y un ancho de banda 1.414 rads/s. Hacerlo empleando la técnica del lugar de las raíces y representando también la situación en frecuencia.

$G(s) = \frac{0.1}{s^2-1}, \quad D(s) = K\,\frac{s+1}{s+p}$

ESPECIFICACIONES

t_{po} pico : $t_p = \frac{\pi}{w_d} = 3.14 \rightarrow w_d = 1$

Ancho B.: $w_n = \sqrt{2}$



Lugar de las raíces: $\quad 1 + K_{LR}\cdot L'(s) = 0 \rightarrow L'$ = expresión racional normalizada

$L(s) = K\cdot\frac{s+1}{s+p}\cdot\frac{0.1}{s^2-1} \qquad 1 + \underbrace{K\times 0.1}_{K_{LR}}\times\underbrace{\frac{s+1}{(s+p)(s^2-1)}}_{L'(s)} = 0$

Hallamos p. Crit. argumento sobre s_d:

$\Sigma\theta_{p_i} - \Sigma\theta_{c_i} = 180^\circ(2q+1) \rightarrow \theta_p + \theta_{p_2} + \cancel{\theta_{p_1}} - \cancel{\theta_{c_1}} = 180^\circ$ (iguales)

$\rightarrow \theta_p = 180^\circ - \theta_{p_2} \rightarrow \theta_p = \alpha \rightarrow p$ en situación simetrica con +1 respecto a -1 $\Rightarrow \boxed{p = 3}$

Para hallar K : Criterio del módulo

$$K\cdot 0.1 = \frac{\prod dp_i}{\prod dc_i} = \frac{dp_2\; dp\; \cancel{dp_1}}{\cancel{dc_1}} = \frac{\sqrt{5}\times\sqrt{5}}{1} = 5$$

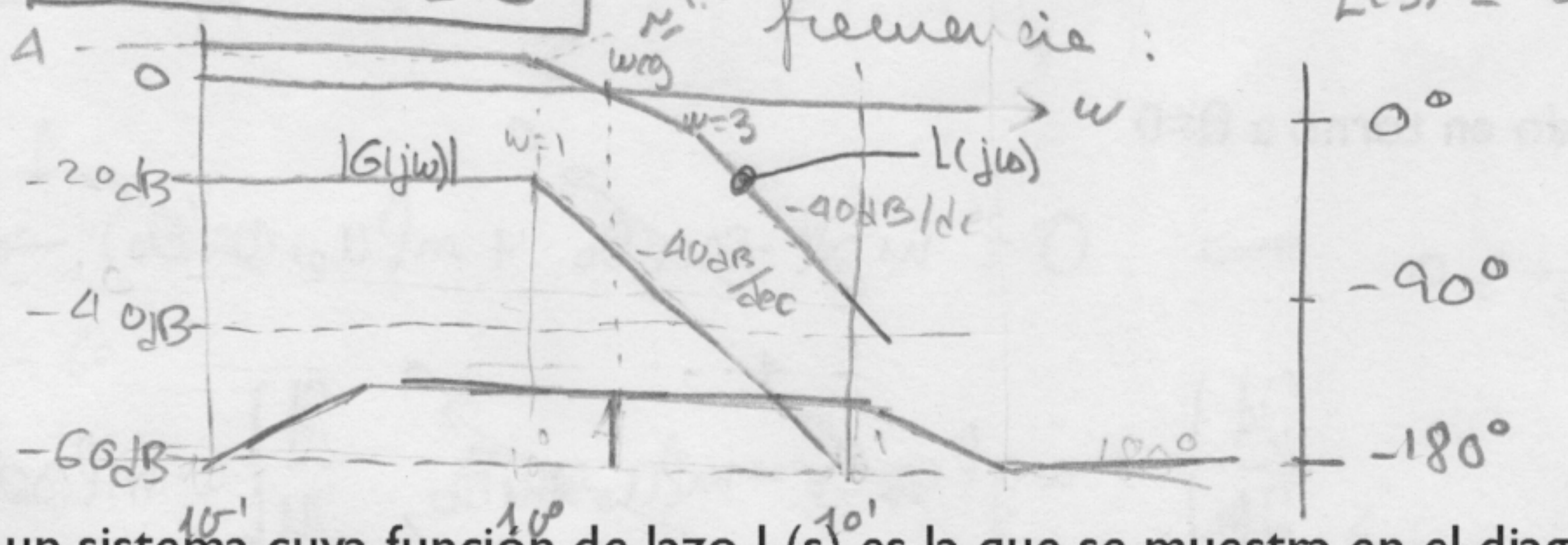
(iguales)

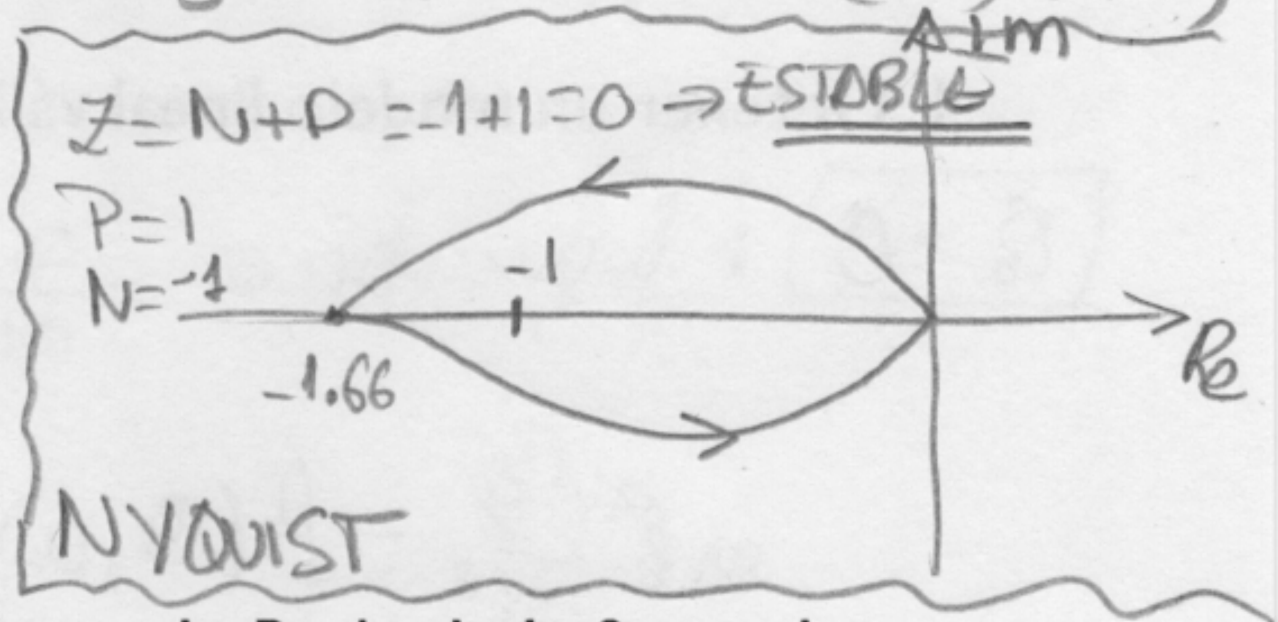
$$dp_2 = dp = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5} \Longrightarrow K = \frac{5}{0.1} = 50 \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{D(s) = 50\,\frac{s+1}{s+3}}$$

Situación en frecuencia:

$$L(s) = 50\,\frac{s+1}{s+3}\cdot 0.1\,\frac{1}{s^2-1} = 5\cdot\frac{s+1}{(s+3)(s^2-1)}$$





Para un sistema cuya función de lazo L(s) es la que se muestra en el diagrama de Bode de la figura de abajo, proponer un controlador del tipo

$$D(s) = K\cdot\frac{s+z}{s+p}$$

que asegure un error de seguimiento de referencias menor del 10% hasta 2 rads/s. Trazar sobre la figura la restricción anterior y el diagrama del Bode del sistema compensado con el controlador propuesto. ¿es aceptable en cuanto a sobreoscilación y estabilidad relativa?

$$|S| = \frac{1}{|1+L(j\omega)|} < 0.1$$

↓

$|L(j\omega)| > 10$ (+20dB)

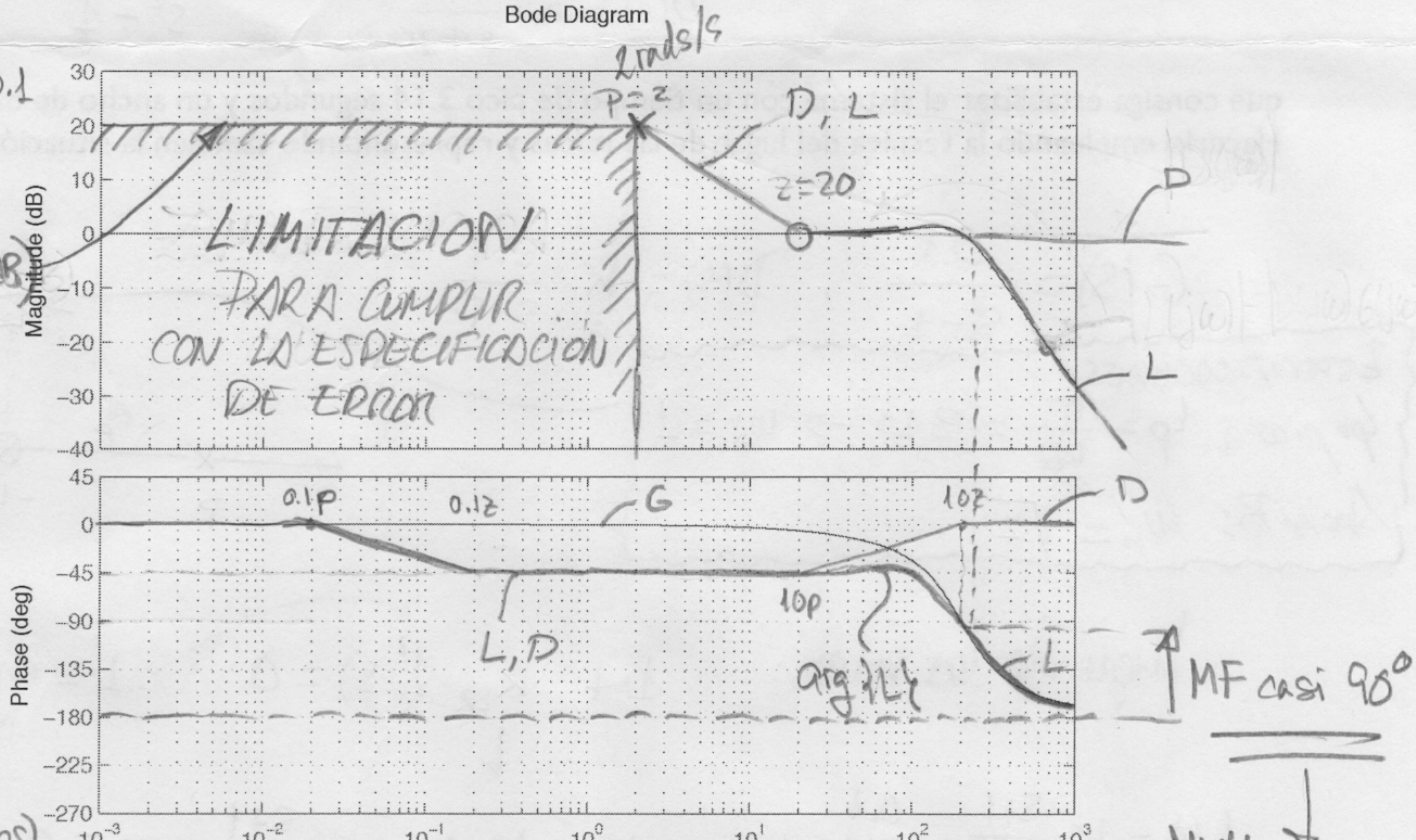
(aproximación)

↓

$$\frac{z}{p} = 10$$

↓

(ganancia en BF debe ser 10 al menos)



MF casi 90°

↓

MUY BUENA ESTABILIDAD

$p=2 \longrightarrow z=20$, $k=1 \longrightarrow \boxed{D = 1\times\frac{s+20}{s+2}}$

eligiendo p=2 el controlador aporta la ganancia $\frac{z}{p}$ hasta ω = 2 rads/s

$\zeta \simeq \frac{MF}{100} = 0.9$ → Poco oscilatorio