Universidad de Oviedo

ingeniería de sistemas y automática

Implementación digital de reguladores: discretización

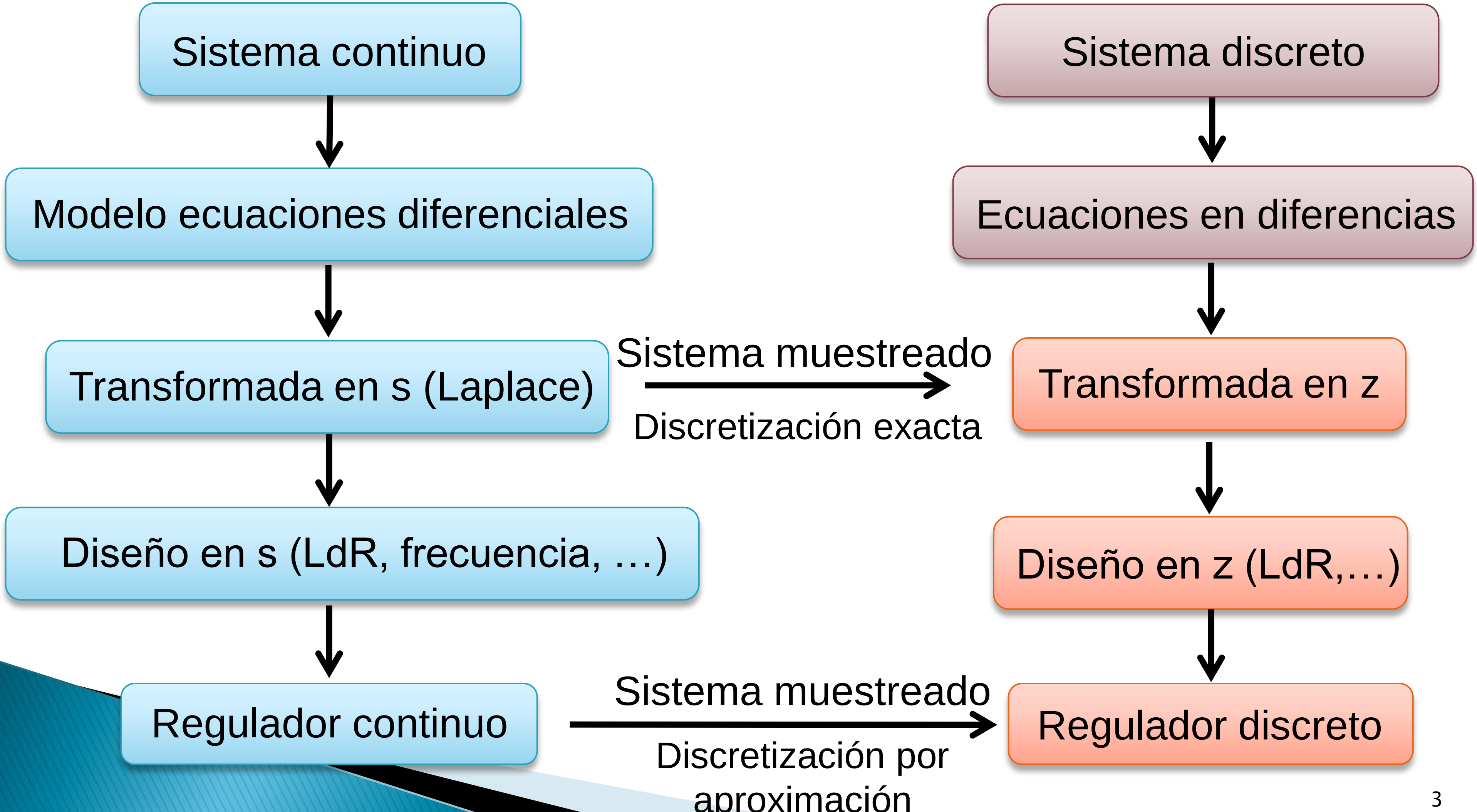
Sistemas Automáticos- Tema 13

Contenidos del tema

- Discretización de reguladores continuos
- Diseño del filtro *antialiasing*
- Selección de la frecuencia de muestreo
- Ejemplo de discretización

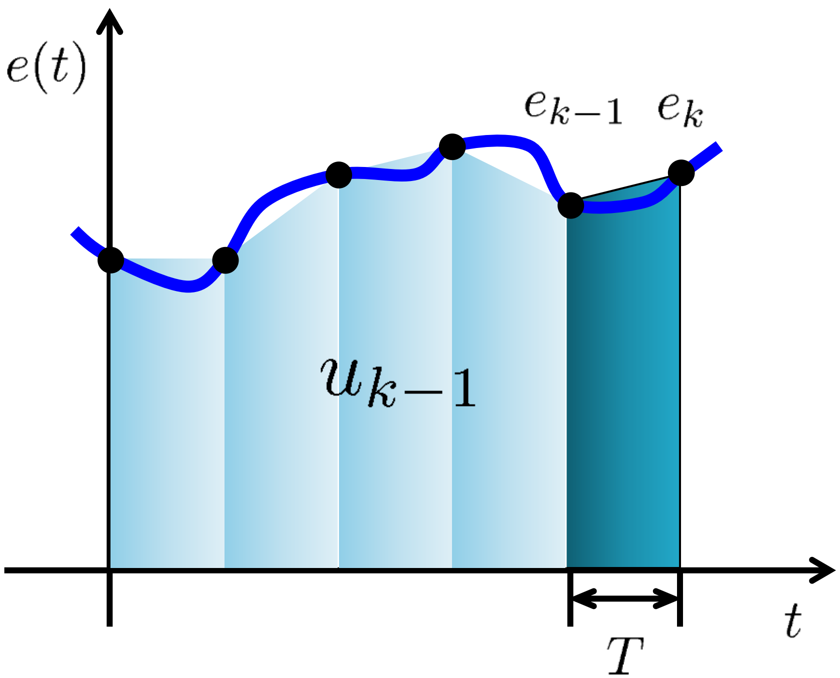
Discretización de reguladores

- Diseño de reguladores discretos:



Discretización de reguladores

- Aproximación de Tustin (bilineal, trapezoidal)



$$u(t) = \int_0^t e(t)dt$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = \frac{1}{s}$$

$$u_k = u_{k-1} + \frac{T}{2}\left(e_{k-1} + e_k\right)$$

$$U(z) = z^{-1}U(z) + \frac{T}{2}\left(z^{-1}E(z) + E(z)\right)$$

$$\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{T}{2}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

$$\boxed{s \cong \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Discretización de reguladores

- Método de mapeado polo-cero (MPZ)
  - Se mapean los polos y ceros utilizando la relación exacta z-s: $\boxed{z = e^{sT}}$

$$D(s) = K_c \frac{s+a}{s(s+b)} \longrightarrow D(z) = K_d \frac{z - e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-bT})}$$

  - Si el numerador es de menor orden que el denominador se añaden potencias de $(z+1)$

$$\boxed{D(z) = K_d \frac{(z+1)(z-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-bT})}}$$

  - Se igualan las ganancias estáticas (eliminando polos $s=0,\ z=1$)

$$K_c \frac{a}{b} = K_d \frac{2(1-e^{-aT})}{(1-e^{-bT})} \longrightarrow K_d = K_c \frac{a(1-e^{-bT})}{2b(1-e^{-aT})}$$

Discretización de reguladores

Método de mapeado polo-cero modificado (MMPZ)

- Se mapean los polos y ceros utilizando la relación

  exacta z-s: $\boxed{z = e^{sT}}$

$$D(s) = K_c \frac{s+a}{s(s+b)} \longrightarrow D(z) = K_d \frac{z - e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-bT})}$$

- Si el numerador es orden menor que el orden del denominador menos uno $(n < m-1)$ se añaden potencias de $(z+1)$

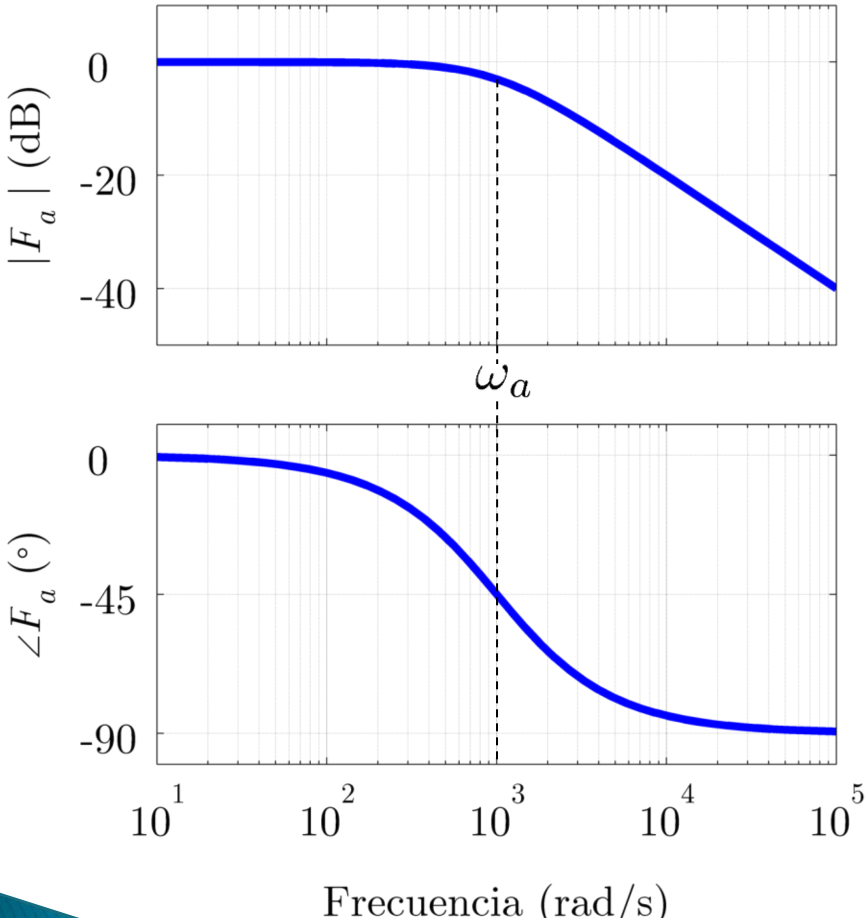
$$\boxed{D(z) = K_d \frac{z - e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-bT})}}$$

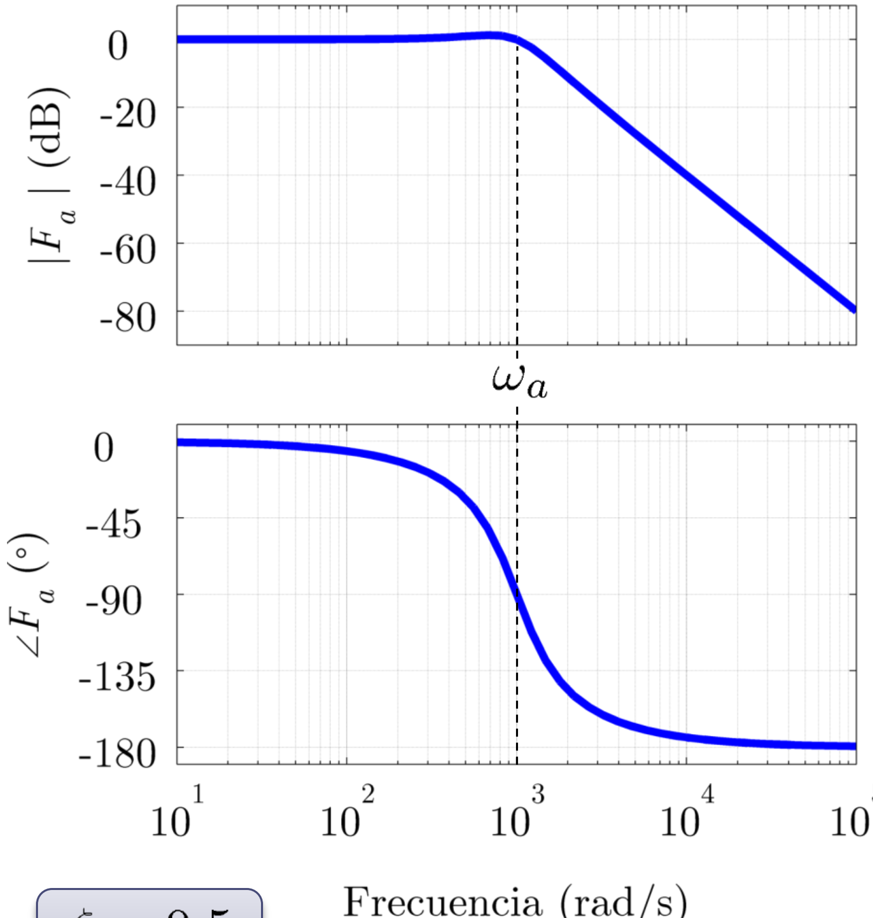
- Se igualan las ganancias estáticas (eliminando polos $s=0,\ z=1$)

$$K_c \frac{a}{b} = K_d \frac{1 - e^{-aT}}{(1-e^{-bT})} \longrightarrow K_d = K_c \frac{a(1-e^{-bT})}{b(1-e^{-aT})}$$

Diseño del filtro antialiasing

- Filtros de Butterworth





$$F_a(s) = \frac{\omega_a}{s + \omega_a}$$

$\zeta = 0{,}5$

$$F_a(s) = \frac{\omega_a^2}{s^2 + \omega_a s + \omega_a^2}$$

Diseño del filtro antialiasing

- Selección de la frecuencia del filtro

$$D(s) = 3{,}35$$

$$G(s) = \frac{s+8}{(s+3)(s+1)}$$

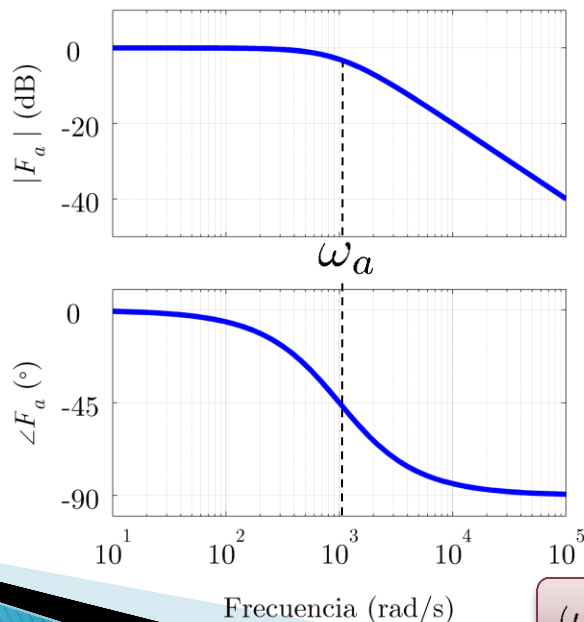
$$H(s) = \frac{6}{(s+6)}$$

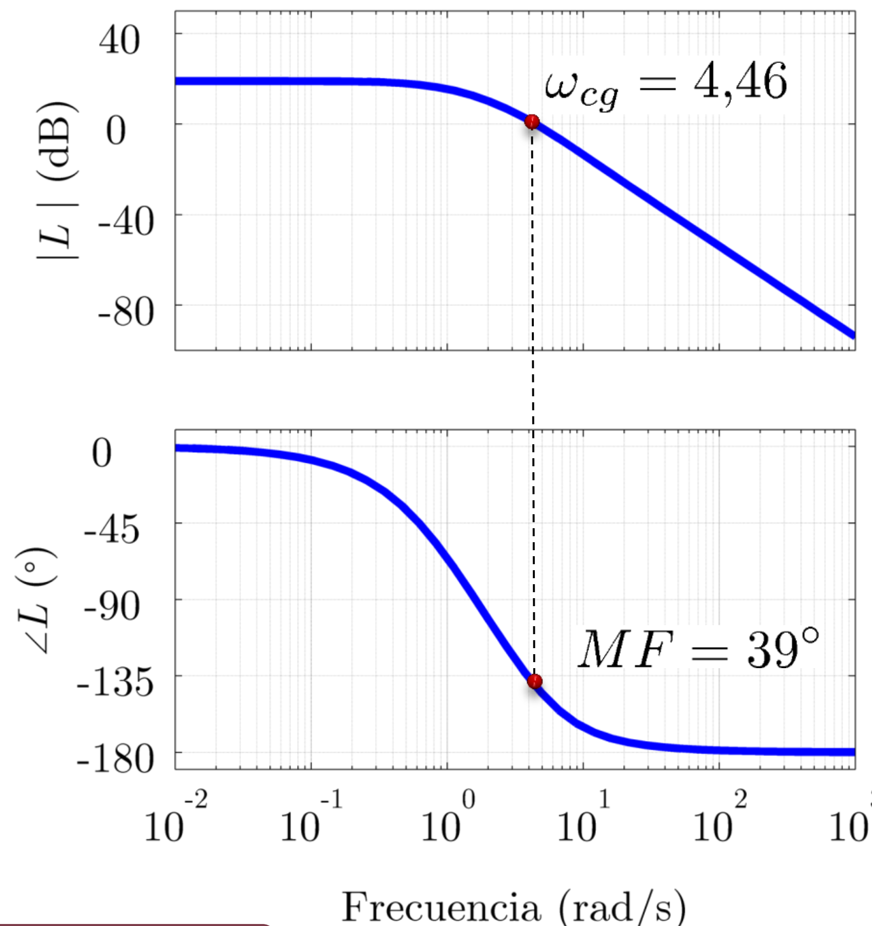
Especificaciones:

$$M_p \leq 30\%$$

$$e_{rp} \leq 15\%$$

$$F_a(s) = \frac{\omega_a}{s+\omega_a}$$





$$\omega_a > 10 \cdot \omega_{cg}$$

Diseño del filtro antialiasing

- Selección de la frecuencia del filtro

$$D(s) = 3{,}35$$

$$G(s) = \frac{s+8}{(s+3)(s+1)}$$

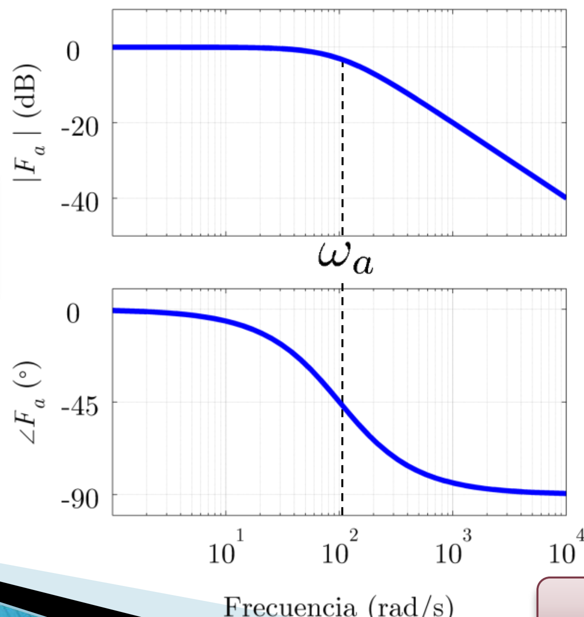
$$H(s) = \frac{6}{(s+6)}$$

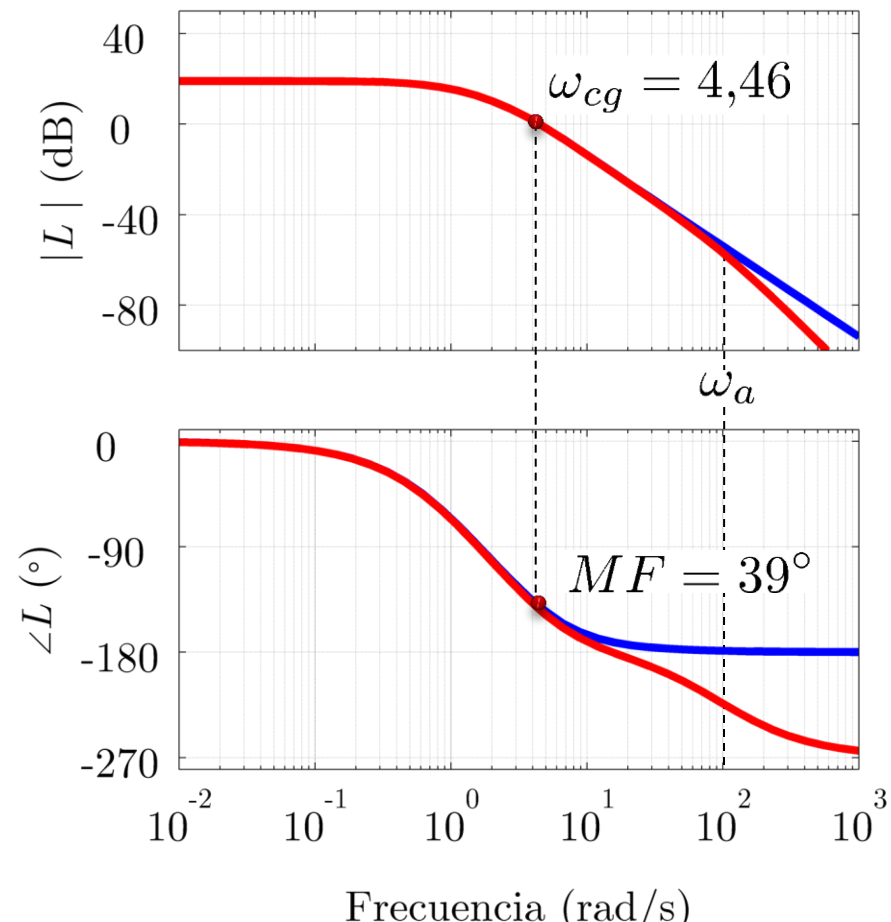
Especificaciones:

$$M_p \leq 30\%$$

$$e_{rp} \leq 15\%$$

$$F_a(s) = \frac{100}{s+100}$$





$$\omega_a > 44{,}6$$

Frecuencia de muestreo

- Sin filtro antialiasing y discretización por aproximación

$$\omega_m \geq 20 \sim 40 \times \omega_{bw}$$

- Con filtro antialiasing y discretización por aproximación

$$\omega_m \geq 5 \sim 10 \times \omega_a$$

- Subir ω_m implica un problema de coste y de cuantificación. Si no es posible habrá que recurrir al diseño discreto

Ejemplo de discretización

$$D(s) = k\frac{s+z}{s+p}$$

$$G(s) = \frac{s+8}{(s+3)(s+1)}$$

$$H(s) = \frac{6}{(s+6)}$$

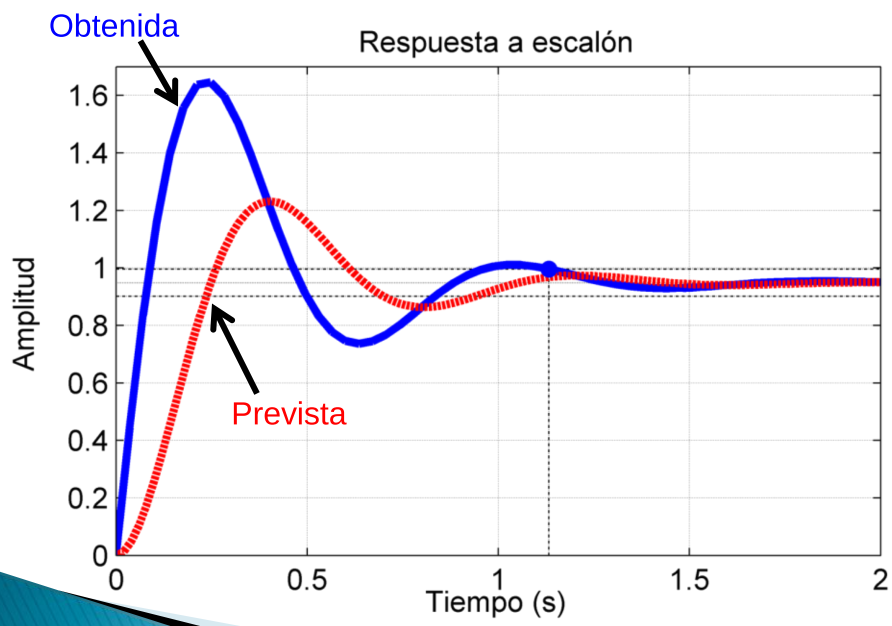
Especificaciones:

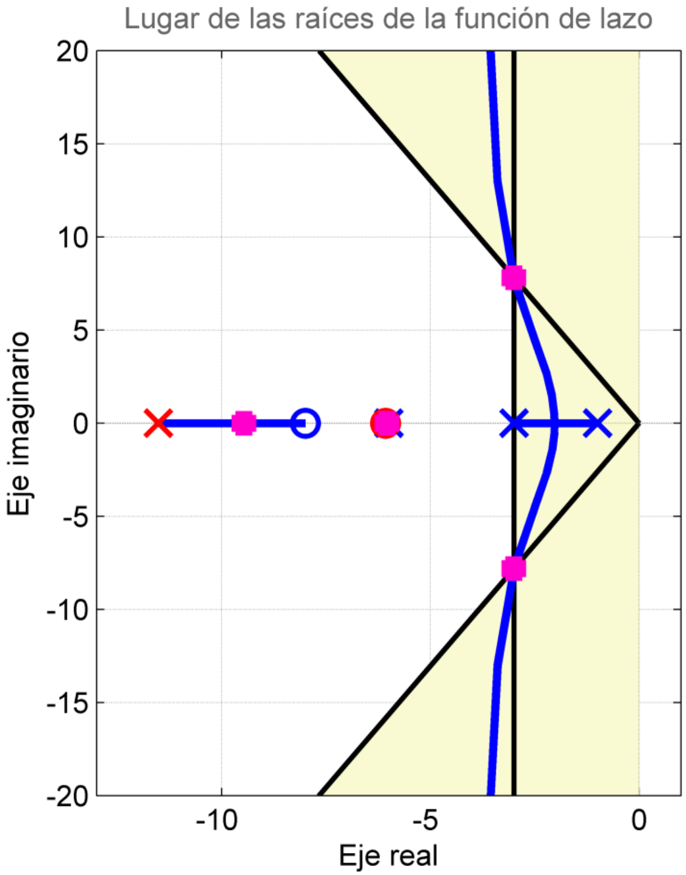
$$M_p \leq 30\%$$

$$t_s \leq 1s$$

$$e_{rp} \leq 15\%$$

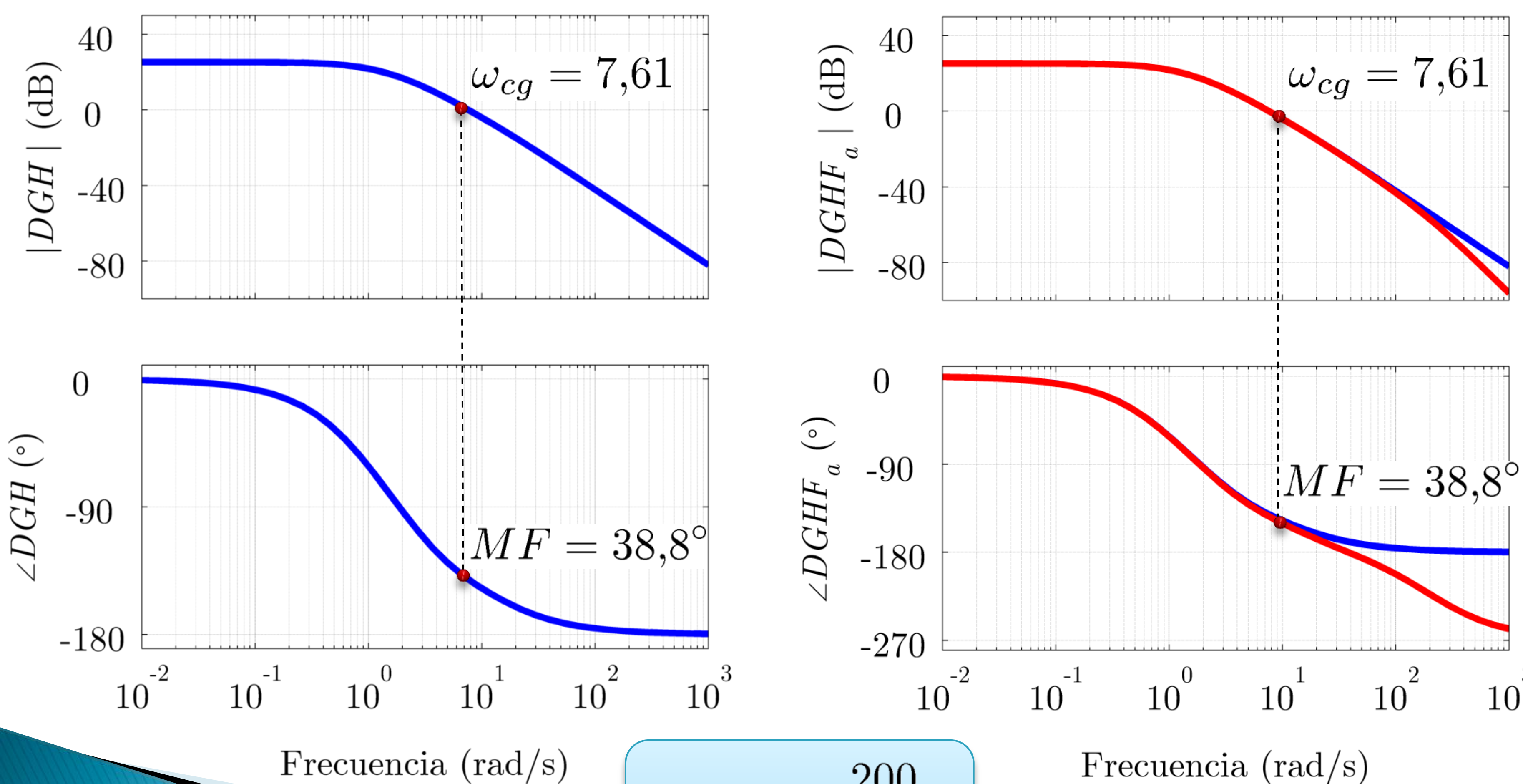
Criterio de la bisectriz





$$D(s) = 13{,}03\frac{s+6{,}075}{s+11{,}52}$$

Ejemplo de discretización



$$F_a(s) = \frac{200}{s + 200}$$

Ejemplo de discretización

$$\boxed{\omega_m \geq 5 \sim 10 \times \omega_a} \longrightarrow \omega_m = 2000 \longrightarrow T = \frac{2\pi}{2000} = 0{,}0031416$$

Aproximación de Tustin: $\boxed{s \cong \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$

```
Dz = c2d(D,T,'tustin')
```

$$D(s) = 13{,}03\frac{s+6{,}075}{s+11{,}52}$$

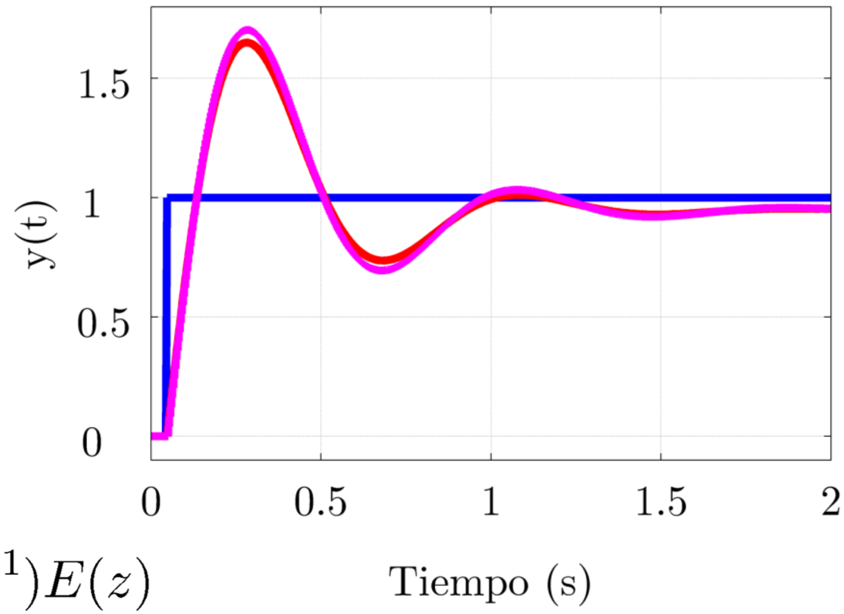
$$D(z) = 13{,}03\frac{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+6{,}075}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+11{,}52} = 13{,}03\frac{636{,}6198\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+6{,}075}{636{,}6198\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+11{,}52}$$

$$D(z) = 13{,}03\frac{636{,}6198-636{,}6198z^{-1}+6{,}075+6{,}075z^{-1}}{636{,}6198-636{,}6198z^{-1}+11{,}52+11{,}52z^{-1}} = 13{,}03\frac{642{,}6948-630{,}5448z^{-1}}{648{,}1398-625{,}0998z^{-1}}$$

$$\boxed{D(z) = 12{,}9205\frac{1-0{,}9811z^{-1}}{1-0{,}9645z^{-1}}}$$

Ejemplo de discretización

$$D(z) = 12{,}9205\frac{1-0{,}9811z^{-1}}{1-0{,}9645z^{-1}}$$



$$\frac{U(z)}{E(z)} = 12{,}9205\frac{1-0{,}9811z^{-1}}{1-0{,}9645z^{-1}}$$

$$(1-0{,}9645z^{-1})U(z) = 12{,}9205(1-0{,}9811z^{-1})E(z)$$

$$u_k - 0{,}9645u_{k-1} = 12{,}9205(e_k - 0{,}9811e_{k-1})$$

$$u_k = 0{,}9645u_{k-1} + 12{,}9205(e_k - 0{,}9811e_{k-1})$$