Universidad de Oviedo

ingeniería de sistemas y automática

Análisis del lazo de realimentación: sensibilidad y estabilidad

Sistemas Automáticos- Tema 3

Contenidos del tema

- Sensibilidad del lazo de realimentación
- Estabilidad absoluta en cadena cerrada
- Estabilidad relativa
- Relación entre la estabilidad relativa y la sensibilidad

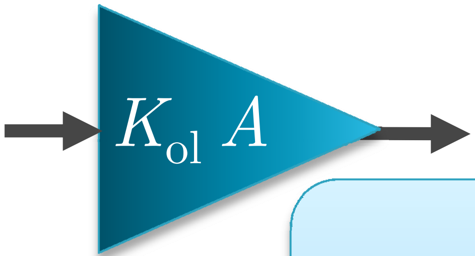
Sensibilidad del lazo de realimentación

- Definición de la RAE:
  - Capacidad de respuesta a muy pequeñas excitaciones, estímulos o causas
- Concepto de sensibilidad en control:
  - Variación relativa de una función de transferencia frente a variaciones relativas de uno o más parámetros
- Formulación de H.W. Bode

$$S_q^G = \frac{\left(\frac{\delta G}{G}\right)}{\left(\frac{\delta q}{q}\right)}$$

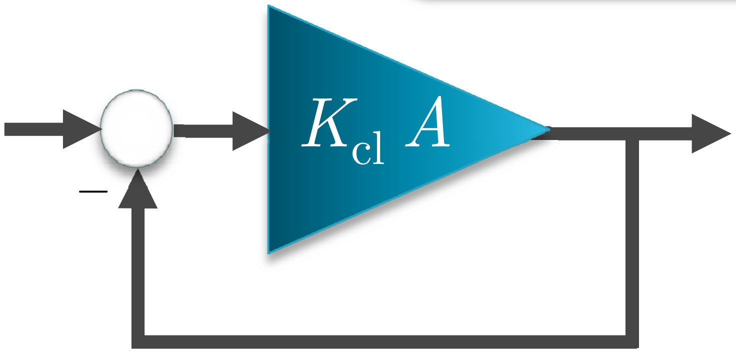
Sensibilidad del lazo de realimentación

- El amplificador con realimentación negativa de Black

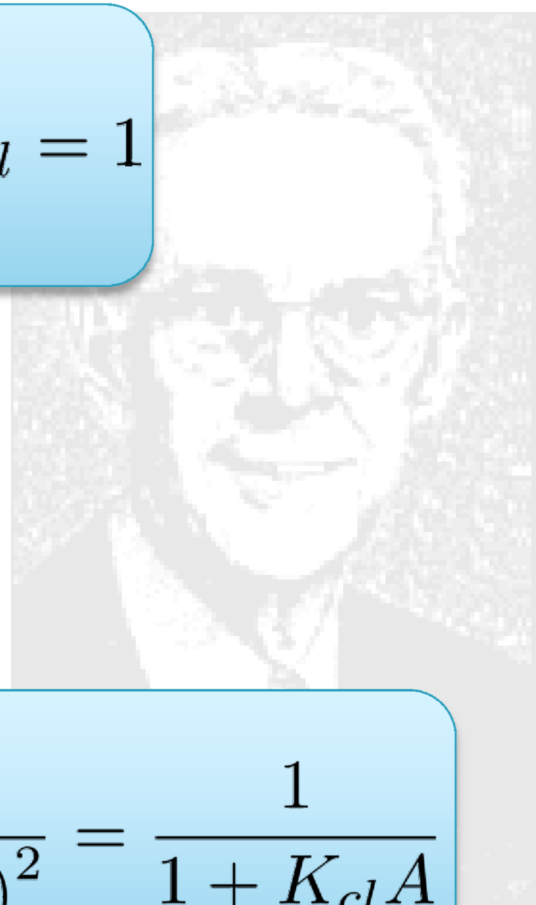


$$T_{ol} = K_{ol} A$$

$$S_A^{T_{ol}} = \frac{\left(\frac{\delta T_{ol}}{T_{ol}}\right)}{\left(\frac{\delta A}{A}\right)} = \frac{A}{T_{ol}} \frac{\partial T_{ol}}{\partial A} = \frac{A}{K_{ol} A} K_{ol} = 1$$



$$T_{cl} = \frac{K_{cl} A}{1 + K_{cl} A}$$



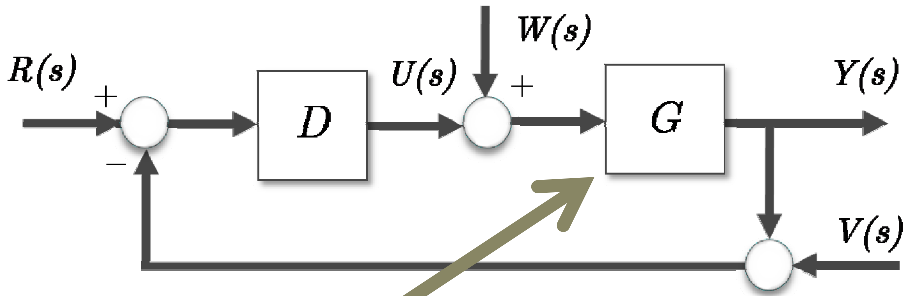
$$S_A^{T_{cl}} = \frac{\left(\frac{\delta T_{cl}}{T_{cl}}\right)}{\left(\frac{\delta A}{A}\right)} = \frac{A}{T_{cl}} \frac{\partial T_{cl}}{\partial A} = \frac{A}{\frac{K_{cl} A}{1+K_{cl} A}} \frac{K_{cl}}{(1 + K_{cl} A)^2} = \frac{1}{1 + K_{cl} A}$$

Sensibilidad del lazo de realimentación

- Relación con la función de sensibilidad

En ausencia de incertidumbres en el modelo la relación entre salida y referencia es:

$$T = \frac{Y}{R} = \frac{DG}{1+DG}$$



La planta, G, puede sufrir variaciones δG debidas a causas externas, errores de modelado, etc.

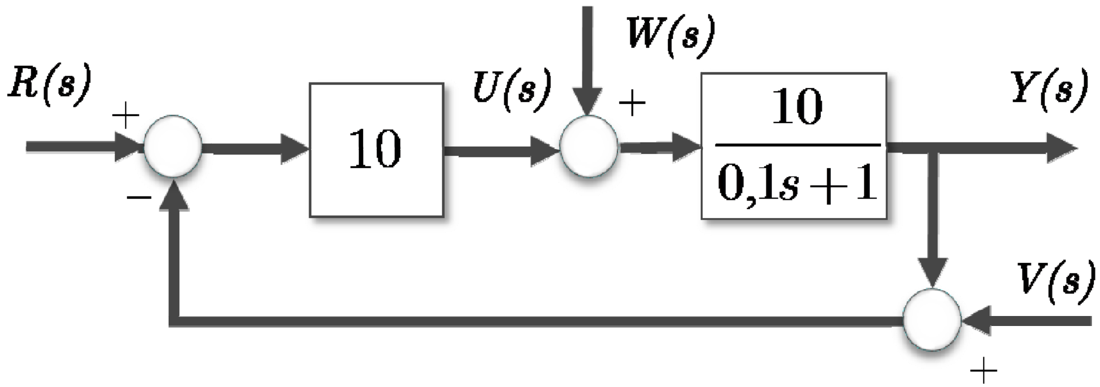
$$G \longrightarrow G + \delta G$$

El impacto en la respuesta debido a una variación δG es:

$$S_G^T = \frac{\left(\frac{\delta T}{T}\right)}{\left(\frac{\delta G}{G}\right)} = \frac{G}{T}\frac{\partial T}{\partial G} = \frac{G}{\frac{DG}{1+DG}} \frac{D}{(1+DG)^2} = \frac{1}{1+DG} = S$$

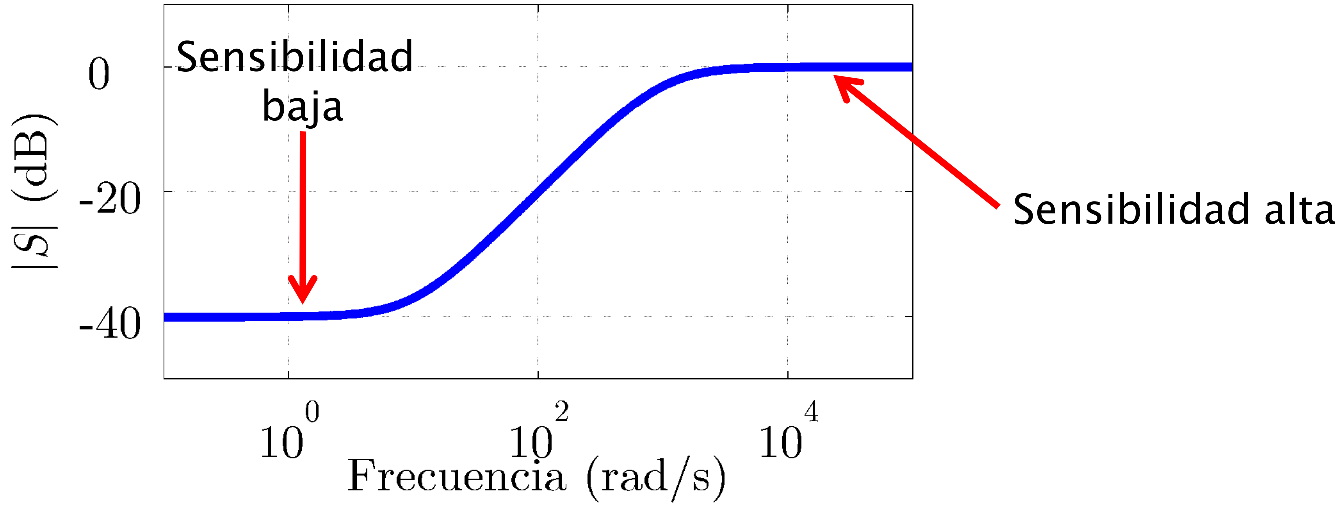
Sensibilidad del lazo de realimentación

- Relación con la función de sensibilidad



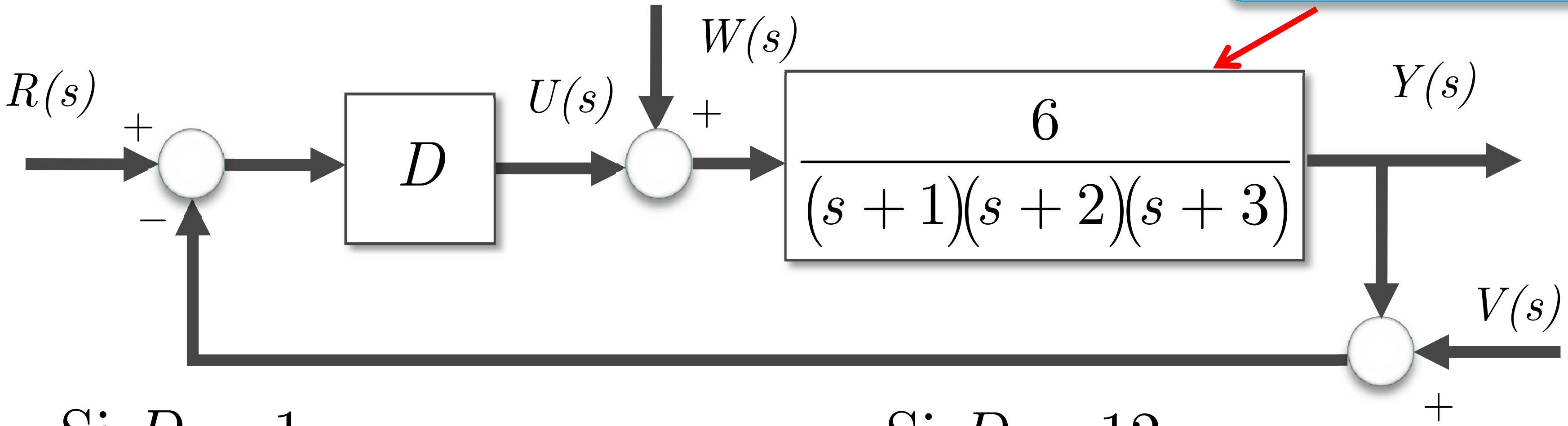
Sensibilidad

$$S = \frac{s+10}{s+1010}$$



Estabilidad absoluta

Planta estable



Si $D = 1$

Estable

$$T = \frac{6}{(s+4)\,(s^2+2s+3)}$$

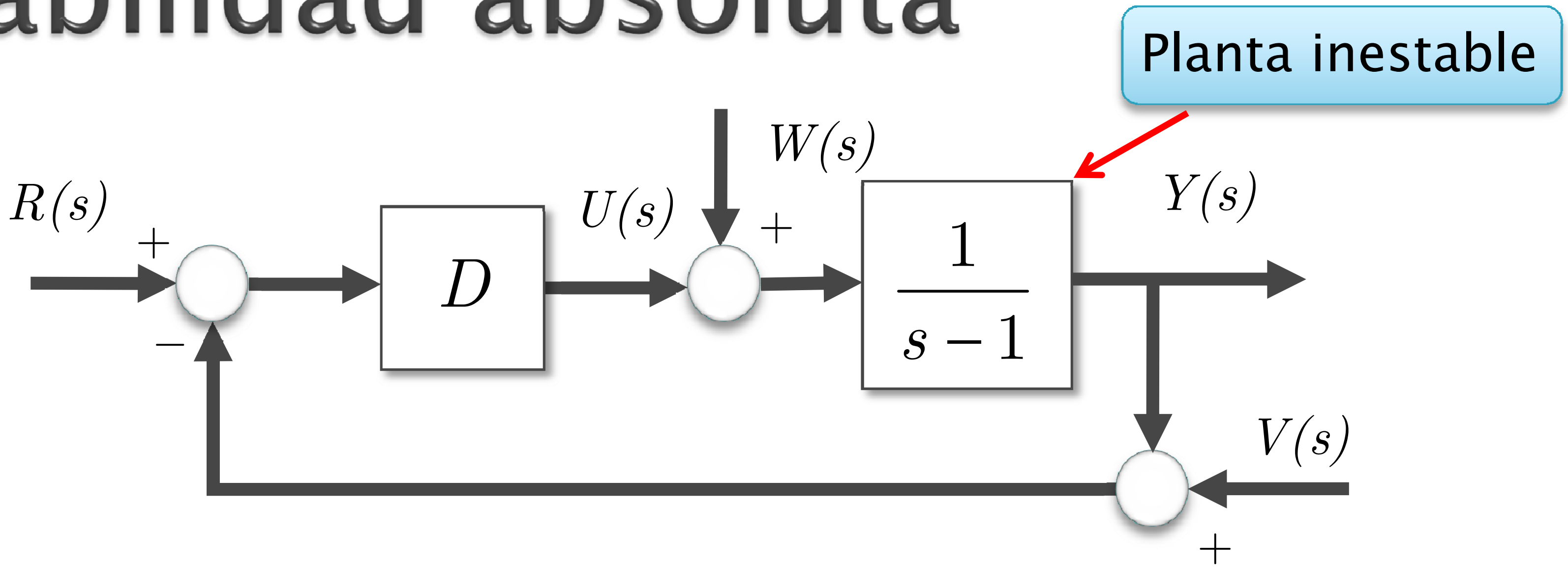
Si $D = 12$

Inestable

$$T = \frac{72}{(s+6.24)(s^2-0.2403s+12.5)}$$

- Un sistema es estable en cadena cerrada si todos los polos de las funciones de sensibilidad son negativos
- Un sistema realimentado puede inestabilizarse aún cuando la planta controlada es estable

Estabilidad absoluta



$$\text{Si } D = 2$$

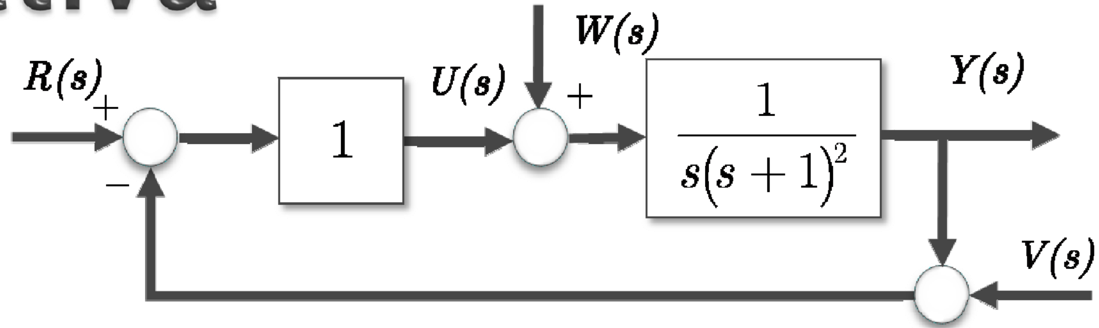
Estable

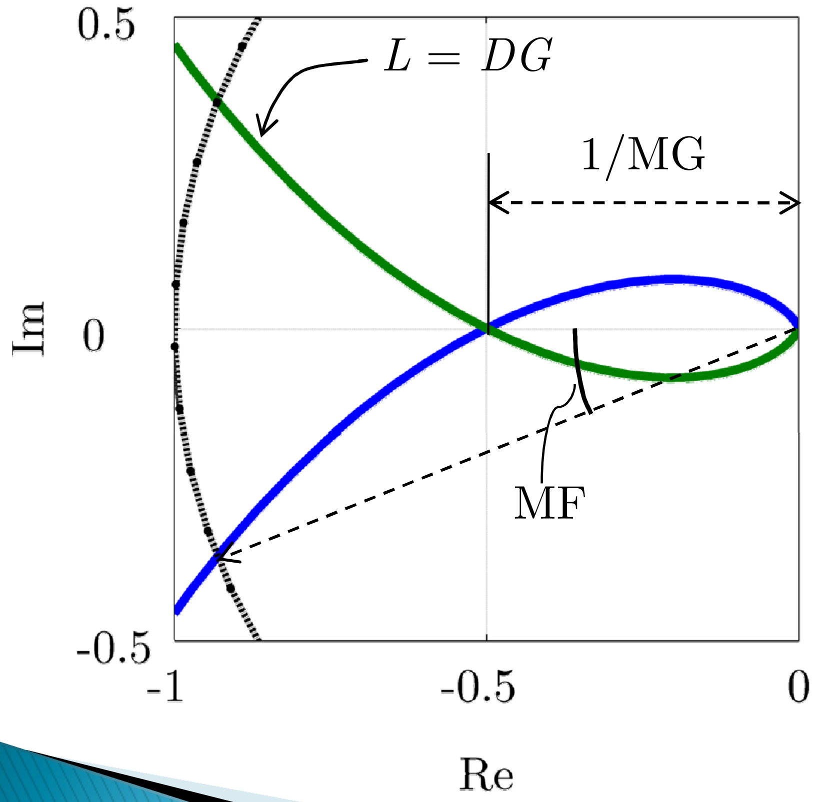
$$T = \frac{2}{(s+1)}$$

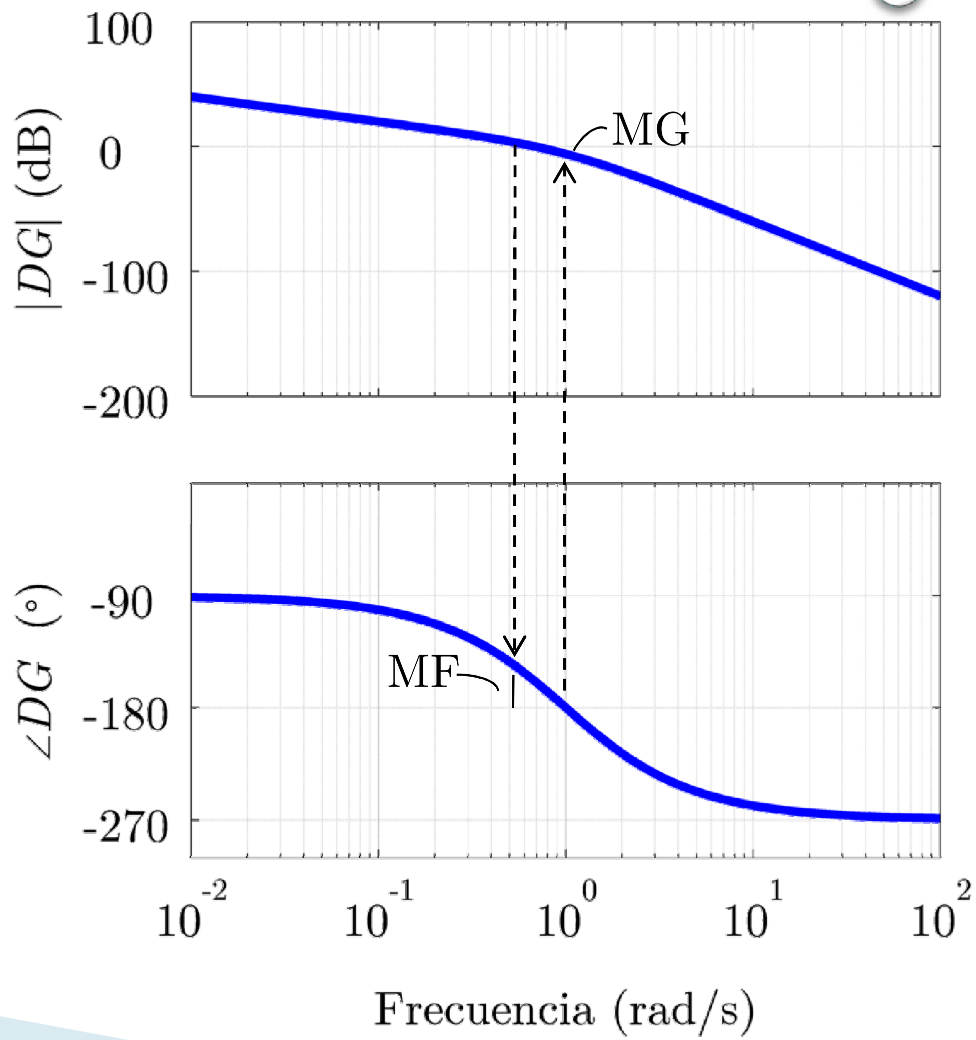
- La realimentación permite controlar de forma estable una planta inestable

Estabilidad relativa

$$T = \frac{1}{(s + 1.755)(s^2 + 0.2451s + 0.5698)}$$







Estabilidad relativa y sensibilidad

Los márgenes clásicos pueden establecerse en términos de α_1 y α_2

$$\mathrm{MG} = \frac{1}{1-\alpha_1}, \qquad \mathrm{MF} = 2\arcsin\frac{\alpha_2}{2}$$

$$\alpha$$

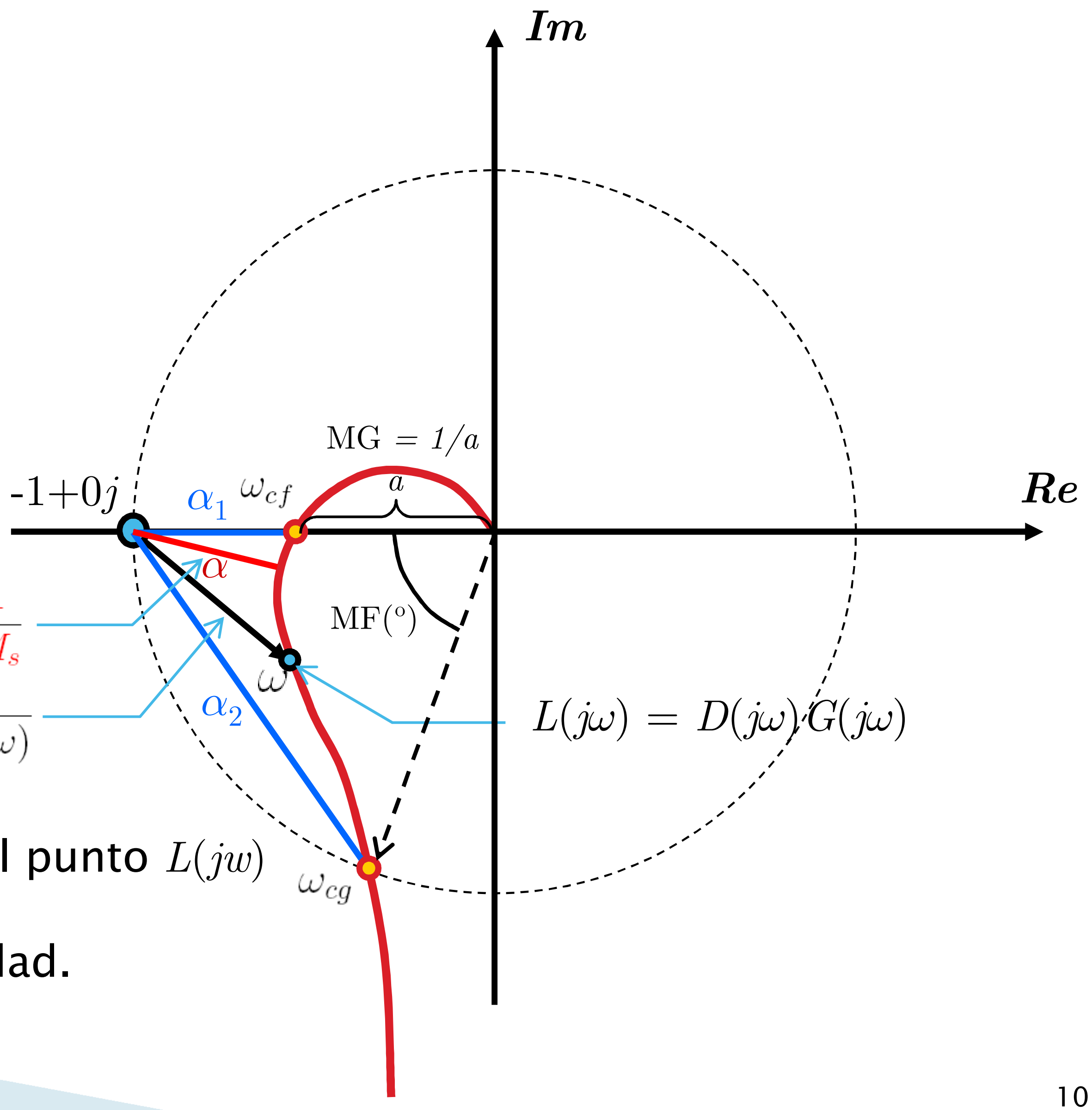
Márgenes robustos

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{MG}^* &= \frac{1}{1-\alpha} \leq \mathrm{MG} \\ \mathrm{MF}^* &= 2\arcsin\frac{\alpha}{2} \leq \mathrm{MF} \end{aligned}}$$

punto de distancia mínima

$$M_s = \max_{\omega} |S(j\omega)|, \qquad \alpha = \frac{1}{M_s}$$

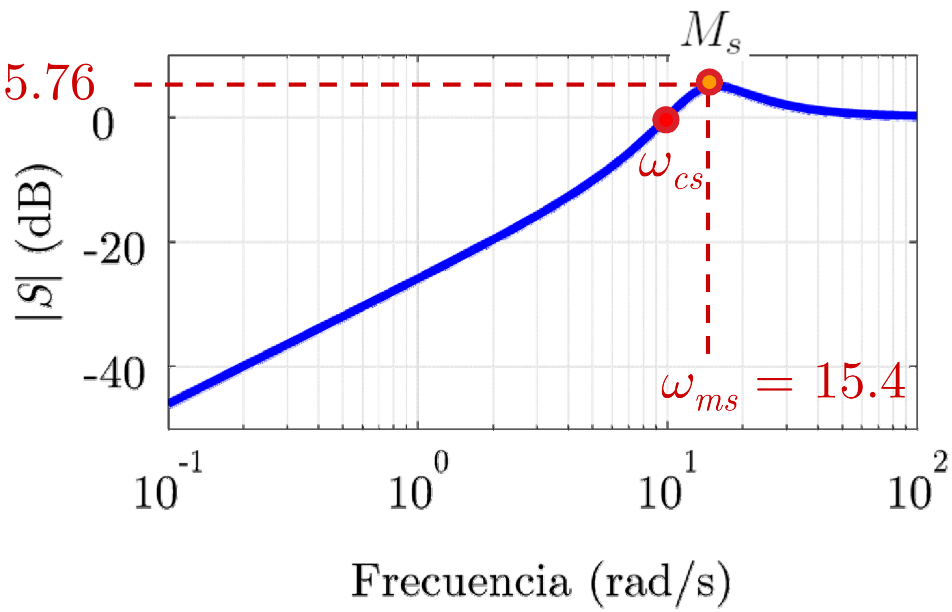
$$1 + L(j\omega) = \frac{1}{S(j\omega)}$$

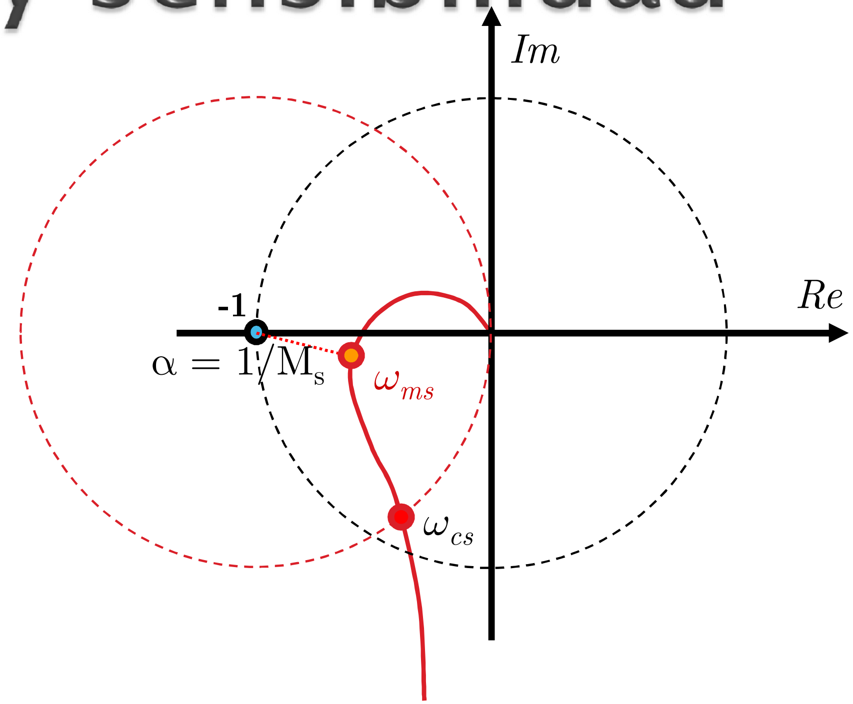


La distancia del punto -1 al punto $L(jw)$ es precisamente la inversa del módulo de la sensibilidad.

Estabilidad relativa y sensibilidad

Visualizando la curva de sensibilidad puede obtenerse información sobre la estabilidad relativa



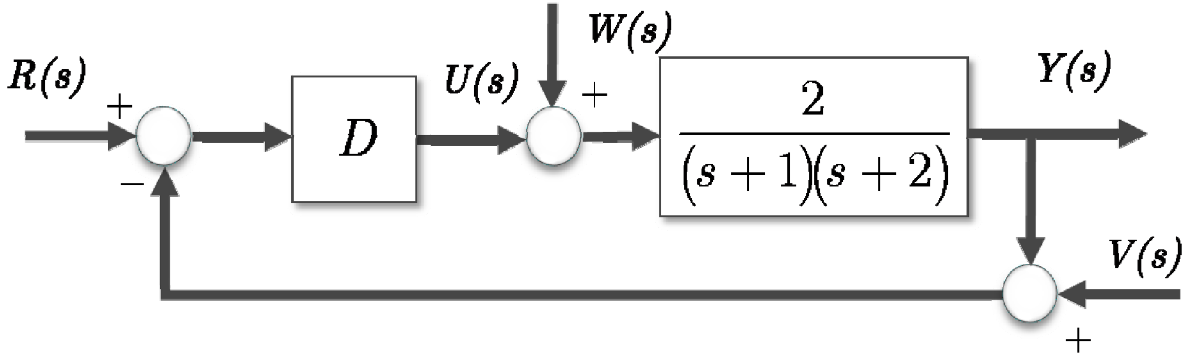


Márgenes robustos:

$$\mathrm{MG}^* = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\mathrm{MF}^* = 2\ \arcsin\frac{\alpha}{2}$$

Estabilidad relativa y sensibilidad

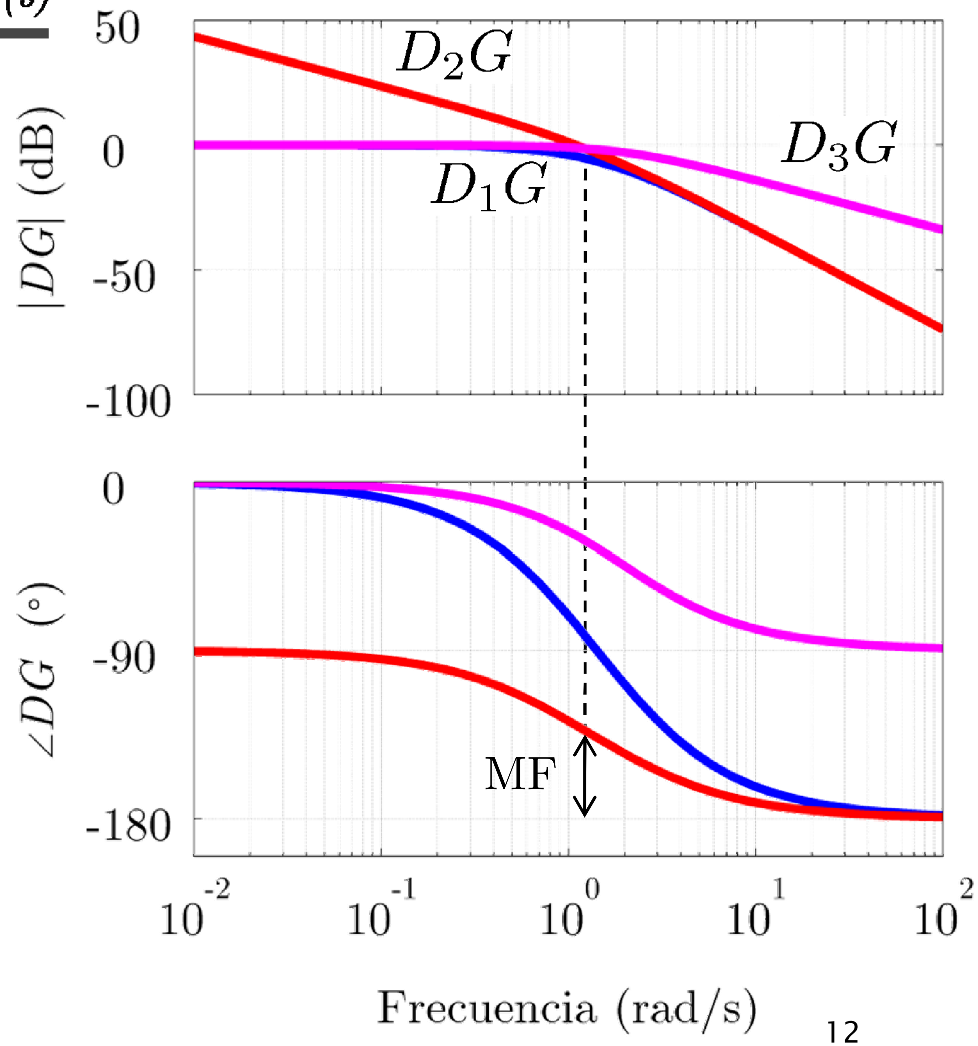


$$D_1 = 1$$

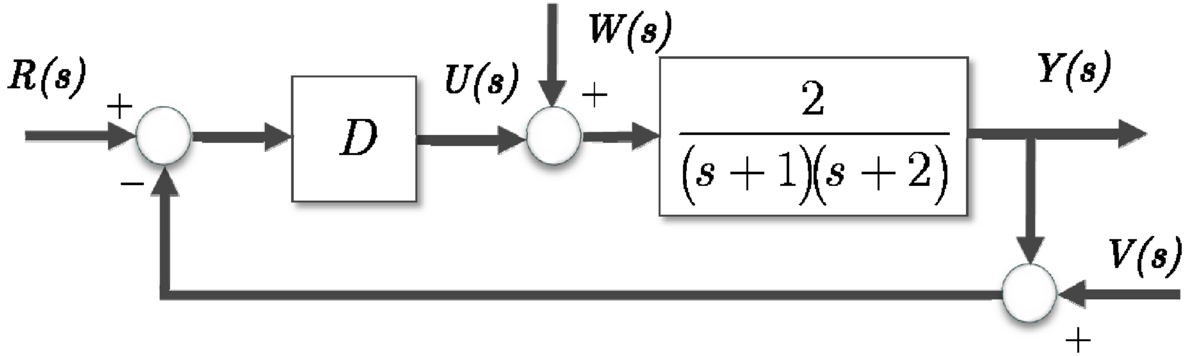
$$D_2 = 1 + \frac{1.5}{s}$$

$$D_3 = 1 + s$$

Controlador	MG	MF
D_1	∞ dB	180°
D_2	∞ dB	49.8°
D_3	∞ dB	180°



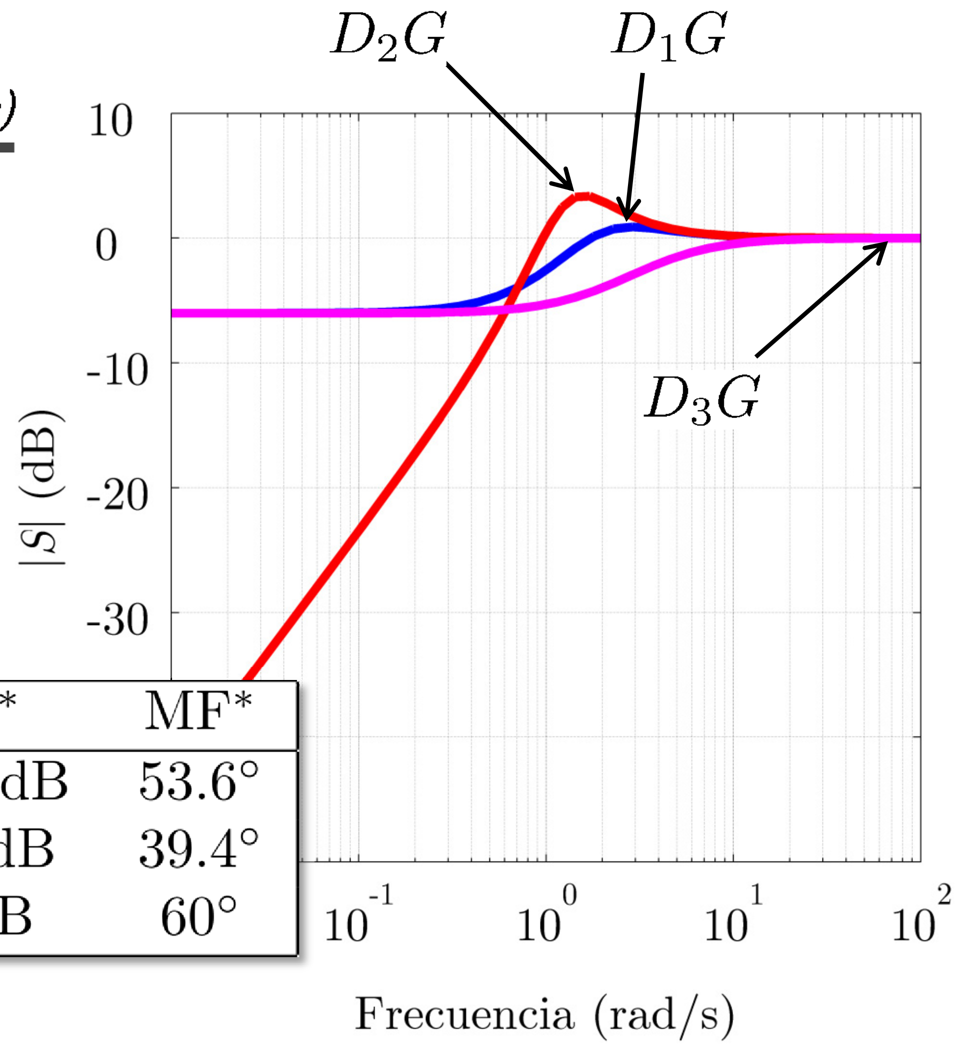
Estabilidad relativa y sensibilidad



$$D_1 = 1$$
$$D_2 = 1 + \frac{1.5}{s}$$
$$D_3 = 1 + s$$

Márgenes robustos:

$$\mathrm{MG}^* = \frac{1}{1-\alpha}$$
$$\mathrm{MF}^* = 2\,\arcsin\frac{\alpha}{2}$$



Controlador	M_s (dB)	M_s	α	MG*	MF*
D_1	0.89	1.11	0.90	20.23 dB	53.6°
D_2	3.42	1.48	0.67	9.75 dB	39.4°
D_3	0.00	1.00	1.00	∞ dB	60°